

125. Les fractions continues ***

La prestigieuse horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg, inaugurée le 31 décembre 1842 à minuit et toujours en fonction, est l'œuvre de Jean-Baptiste Schwilgué (1776 – 1856). Cette horloge comporte, en plus de l'heure exacte, divers cadrans, calendriers et automates, tous d'une précision extraordinaire. Schwilgué réussit ces prouesses grâce notamment à ses connaissances mathématiques dans le domaine des fractions continues.

Tout nombre réel (nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une partie entière et d'une liste finie ou infinie de décimales) peut être représenté par une fraction continue (plus rarement appelée fraction continuée) comprenant un nombre fini ou infini d'étages et ayant la forme suivante :

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \dots}}}}$$

Pour des raisons de commodité, la fraction continue peut être notée ainsi : $[a_1; a_2, a_3, a_4, a_5 \dots]$

Voici comment trouver la fraction continue de $\frac{218}{63}$.

	Dividende	Diviseur	Valeur entière du quotient	Reste
A	218	63	3	29
B	63	29	2	5
C	29	5	5	4
D	5	4	1	1
E	4	1	4	0

Comme $218 = 3 \cdot 63 + 29$, on peut remplir la ligne « A » du tableau de gauche.

Ensuite, le diviseur de « A » devient le dividende de « B » et le reste de « A » devient le diviseur de « B », et ainsi de suite pour les lignes suivantes.

On s'arrête lorsque le reste est égal à 0.

Les nombres de la colonne « Valeur entière du quotient » sont les a_i de la fraction continue. On obtient alors :

$$\frac{218}{63} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

La fraction $\frac{218}{63}$ est égale à $[3; 2, 5, 1, 4]$

Dans le tableau suivant, on a enlevé successivement la dernière fraction de notre fraction continue. On obtient ainsi de nouvelles fractions qui représentent de moins en moins précisément notre fraction initiale.

$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$	$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1}}}$	$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}$	$3 + \frac{1}{2}$	3
$\frac{218}{63}$	$\frac{45}{13}$	$\frac{38}{11}$	$\frac{7}{2}$	3
$3,\overline{460317}$	$3,\overline{461538}$	$3,\overline{45}$	3,5	3

- a) Quelle est la fraction continue de $\frac{63}{218}$?
- b) Quelle est la fraction équivalente à $[4; 2, 2, 1, 5]$?
- c) Quelle est la fraction continue de $\frac{972}{1393}$?
- d) Le nombre π est un nombre irrationnel. Il ne peut donc pas être exprimé par un rapport de deux nombres entiers. Une valeur approximative de π est 3,14. Comme $3,14 = \frac{314}{100}$, cherchez la fraction continue représentant $\frac{314}{100}$. Quelle est la fraction représentant aussi approximativement π si on enlève la dernière fraction de la fraction continue de $\frac{314}{100}$?