123-Le chef des zéros * ** *** ****

En mathématiques, la factorielle d'un entier naturel n s'écrit n! et est le résultat du produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n.

Exemple : 8! (on prononce 8 factorielle) vaut 40'320 $(8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)$. Le dernier chiffre non nul de 40'320 est 2. Ce 2 est appelé le chef des zéros.

Trouvez le chef des zéros de :

a) 6!
b) 12!
c) 29!
d) 50!

Note : cette énigme peut être résolue en ne faisant que de petits calculs.

Solutions

a) 6! = $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ = 720. Le chef des zéros de 6! est **2**.

b) On a vu dans la donnée que le chef des zéros de 8! est 2. En multipliant ce 2 par 9, on a 18. Le chef des zéros de 9! est donc 8. Le chef des zéros de 10! et de 11! reste 8. En multipliant 8 par le chiffre des unités de 12, on obtient 16. Le chef des zéros de 12! est donc **6**.

c) La stratégie qui consiste à trouver les chefs des zéros en allant progressivement comme dans le cas b) est intéressante, mais elle ne fonctionne pas lorsqu'on se trouve face à un nombre qui se termine par 5 (5, 15, 25, 35, etc.) ou dont le dernier chiffre non nul est 5 (50, 500, 5000, etc.).
Pour contourner l'obstacle du nombre 15, une stratégie consiste à remplacer les nombres 14 et 15 par respectivement 7 et 30 $(14\cdot15=7\cdot30)$.

Pour contourner l'obstacle du nombre 25, on remplace les nombres 24 et 25 par respectivement 6 et 100 et non pas par 12 et 50 car 50 est un nombre qui pose des difficultés dans notre énigme.
Dans le tableau suivant, les nombres dont on cherche le chef des zéros de la factorielle sont dans la ligne « A » et les chefs des zéros sont dans la ligne « B ». On a vu que le chef des zéros de 12! est 6. Partons alors de (12 ; 6). En utilisant la stratégie vue en b), on obtient (13 ; 8) puis (14 ; 2). Pour trouver le chef des zéros en 15, on remplace 14 par 7 et 15 par 30 (ligne C). Comme $8\cdot7$ = 56 et $56\cdot3$= 168, alors on arrive à (15 ; 8). On continue ainsi jusqu'à 24 dont le chef des zéros est 6. Pour trouver le chef des zéros en 25, on remplace 24 par 6 et 25 par 100 (ligne C). Comme $4\cdot6\cdot1$= 24, on obtient (25 ; 4).

A	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
B	6	8	2	8	8	6	8	2	4	4	8	4	6	4	4	8	4	6
C			7	30									6	100				

Le chef des zéros de 29! est **6**.

d) Continuons le tableau. Pour contourner l'obstacle du nombre 50, on remplace 48 par 24 et 50 par 100.

A	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	8	8	6	8	2	2	2	4	2	8	2	2	4	2	8	6	6	2	6	4	2
C					17	70									22	90			24	49	100

Le chef des zéros de 50! est **2**.

– Augustin Genoud, juin 2021 –