

117. Des nombres amusants ** *** ****

- a) Les nombres préférés de Sabrina sont composés de 6 chiffres : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Pour chacun d'eux, le nombre formé par les deux premiers chiffres est divisible par 2, celui formé par les trois premiers chiffres est divisible par 3, celui formé par les quatre premiers chiffres est divisible par 4, celui formé par les cinq premiers chiffres est divisible par 5 et celui formé par tous les chiffres est divisible par 6.

Quel est le plus grand nombre préféré de Sabrina ?

- b) Les nombres préférés de Thérèse sont composés de 9 chiffres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Pour chacun d'eux, le nombre formé par les deux premiers chiffres est divisible par 2, celui formé par les trois premiers chiffres est divisible par 3, celui formé par les quatre premiers chiffres est divisible par 4, et ainsi de suite, jusqu'au nombre formé par tous les chiffres qui est divisible par 9.

Quels sont les nombres préférés de Thérèse ?

Solutions

- a) Appelons $abcdef$ le nombre cherché. Il est évident que $e = 5$ et que b , d et f sont pairs. Alors, a et c sont impairs (1 ou 3). Comme on cherche le plus grand nombre, essayons $a = 3$ et $c = 1$.

On a donc pour l'instant le nombre $3b1d5f$. Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3. Alors, b est forcément égal à 2. Seuls 4 et 6 sont encore disponibles. Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Dans ce cas, d vaut nécessairement 6. Il ne reste plus que 4 pour f .

Le nombre préféré de Sabrina est **321'654**.

- b) Appelons $abcdefghi$, le nombre cherché. On sait que $e = 5$, que b , d , f et h sont pairs, alors a , c , g et i sont impairs. Comme la somme des nombres de 1 à 9 est égal à 45, alors i peut valoir n'importe quel chiffre impair.

Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Donc cd doit être un multiple de 4.

Un nombre est divisible par 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8. Donc, fgh doit être un multiple de 8.

Comme $abcdef$ est un multiple de 6, alors il est aussi un multiple de 3. Etant donné que abc est un multiple de 3, alors $abc000$ est aussi un multiple de 3. $abcdef - abc000 = def$. Comme $abcdef$ et $abc000$ sont des multiples de 3, alors def est aussi un multiple de 3. Par un raisonnement analogue, on peut démontrer que ghi est également un multiple de 3.

Comme c est impair, alors $cd = 12, 16, 32, 36, 72, 76, 92$ ou 96 , soit 8 cas possibles, avec $d = 2$ ou 6 .

Cherchons les cas possibles de fgh (multiples de 8). Comme g est impair, alors h ne peut pas être égal à 4 ni à 8. Alors, $fgh = 216, 296, 416, 432, 472, 496, 632, 672, 816, 832, 872$ ou 896 , soit 12 cas possibles, avec $h = 2$ ou 6 .

On sait maintenant que d et h peuvent respectivement prendre les valeurs 2 et 6, ou 6 et 2.

Premier cas : supposons $d = 2$ et $h = 6$. Alors, $fgh = 416, 496, 816$ ou 896 . Alors, $def = 254$ ou 258 . Comme 254 n'est pas un multiple de 3, seul 258 reste possible. Donc, $defgh = 25816$ ou 25896 . La seule valeur restante de b est 4. On obtient $a4c25816$ ou $a4c25896$ pour les huit premiers chiffres des nombres cherchés. Pour $a4c25816$, il reste les chiffres 3, 7 et 9 pour a et c . Aucun des six cas possibles de $a4c$ n'est un multiple de 3. Pour $a4c25896$, il reste les chiffres 1, 3 et 7 pour a et c . Seuls 147 et 741 peuvent convenir pour $a4c$. Cependant, 1472589 et 7412589 ne sont pas divisibles par 7. Aucune solution de peut provenir de ce premier cas.

Second cas : supposons $d = 6$ et $h = 2$. Alors, $fgh = 432, 472, 832$ ou 872 . Alors, $def = 654$ ou 658 . Comme 658 n'est pas un multiple de 3 , seul 654 reste possible. Donc, $defgh = 65432$ ou 65472 . La seule valeur restante de b est 8 . On obtient $a8c65432$ ou $a8c65472$ pour les huit premiers chiffres des nombres cherchés. Pour $a8c65432$, il reste les chiffres $1, 7$ et 9 pour a et c . Seuls $189, 789, 981$ et 987 peuvent convenir pour $a8c$. Cependant aucun des nombres formés par les 7 premiers chiffres n'est divisible par 7 . Pour $a8c65472$, il reste les chiffres $1, 3$ et 9 pour a et c . Seuls $183, 189, 381$ et 981 peuvent convenir pour $a8c$. Seul 3816547 est divisible par 7 .

Le nombre préféré de Thérèse est unique, il vaut **381'654'729**.