110. Les maris jaloux * ** * ****

Une barque ne pouvant contenir que deux personnes est disponible pour traverser une petite rivière située dans une contrée où les hommes sont si jaloux qu'ils ne supportent pas que leur femme puisse se trouver en compagnie d'un autre homme sans qu'ils soient aussi présents.

Tout passage d'une rive à une autre ou d'une rive à un îlot constitue une traversée et, à la fin de chaque traversée, tous les occupants de la barque mettent pied à terre.

a) Combien de traversées, au minimum, faut-il à deux couples pour traverser cette rivière ?
b) Combien de traversées, au minimum, faut-il à trois couples pour traverser cette rivière ?
c) Combien de traversées, au minimum, faut-il à quatre couples pour traverser cette rivière ?
d) Si au milieu de la rivière, il y avait un îlot sur lequel on pourrait s'arrêter, combien de traversées, au minimum, faudrait-il à quatre couples pour traverser la rivière ?

Solutions

Remarques liminaires :

- Bien entendu, la barque ne peut pas traverser la rivière toute seule.
- Sur les rives, il ne peut pas y avoir une majorité de femmes, sauf si aucun homme n'est présent.
- Il existe parfois d'autres trajets possibles que ceux indiqués dans les tableaux suivants.
- Il s'agit de problèmes d'optimisation dans lesquels les preuves qu'il s'agit d'un minimum de traversées ne sont pas apportées.
- Dans les tableaux, les flèches indiquent le sens de la traversée et sur les rives sont notées les personnes présentes à la fin de chaque traversée.

a) Soit a et b, les dames et A et B, leurs maris respectifs.

Rive 1	Barque	Rive 2	
AB	→ ab	ab	Les deux dames traversent la rivière
aAB	a ←	b	a revient
a	→ AB	bAB	Les deux hommes traversent la rivière
aA	A ←	bB	A revient
	→ aA	abAB	a et A traversent la rivière

Il faut **<u>5 traversées</u>**, au minimum.

b) Soit a, b et c, les dames et A, B et C, leurs maris respectifs.

Rive 1	Barque	Rive 2
bBcC	→ aA	aA
AbBcC	A ←	a
ABC	→ bc	abc
cABC	c ←	ab
cC	→ AB	abAB
bBcC	bB ←	aA
bc	→ BC	aABC
abc	a ←	ABC
c	→ ab	abABC
ac	a ←	bABC
	→ ac	abcABC

Il faut **<u>11 traversées</u>**, au minimum.

c) Soit a, b, c et d, les dames et A, B, C et D, leurs maris respectifs.

Faisons d'abord traverser le couple aA. Seul A peut revenir. A moins de ne pas progresser dans les traversées, deux dames doivent maintenant embarquer (3e trajet). Une dame revient. Faisons traverser A et B (5e trajet). Un couple doit obligatoirement revenir. On va tourner en rond. Par conséquent, la stratégie tentée ici conduit à une impasse.

Trajets	Rive 1	Barque	Rive 2
1	bBcCdD	$\rightarrow$ aA	aA
2	AbBcCdD	A $\leftarrow$	a
3	ABCdD	$\rightarrow$ bc	abc
4	ABcCdD	c $\leftarrow$	ab
5	cCdD	$\rightarrow$ AB	aAbB

On pourrait aisément faire traverser d'abord les 4 dames en 5 trajets, avec la barque sur la Rive 2. Une dame revient (c). Là aussi, on aboutit à une impasse.

Rive 1	Barque	Rive 2
ABCD	…	abcd
ABcCD	c $\leftarrow$	abd

En fait, il n'y a **<u>pas de solutions</u>**. Sans îlot, la traversée d'une rivière avec une barque ne pouvant contenir que deux places n'est plus possible à partir de 4 couples.

d) Ajoutons l'îlot entre les deux rives. Voici une solution en **<u>17 traversées</u>**. C'est apparemment le minimum possible.

	Rive 1	Barque	Ilot	Barque	Rive 2
1	bBcCdD	$\rightarrow$ aA	-	-	aA
2	AbBcCdD	-	-	A $\leftarrow$	a
3	AcCdD	$\rightarrow$ bB	bB	-	a
4	ABcCdD	B $\leftarrow$	b	-	a
5	ABCD	$\rightarrow$ cd	bcd	-	a
6	ABCdD	d $\leftarrow$	bc	-	a
7	CdD	$\rightarrow$ AB	bc	-	aAB
8	BCdD	-	bc	B $\leftarrow$	aA
9	dD	$\rightarrow$ BC	bc	-	BCaA
10	BdD	-	bc	B $\leftarrow$	CaA
11	d	$\rightarrow$ BD	bc	-	BDCaA
12	dD	-	bc	D $\leftarrow$	BCaA
13	-	$\rightarrow$ dD	bc	-	dDBCaA
14	-	-	bcd	d $\leftarrow$	DBCaA
15	-	-	d	$\rightarrow$ bc	DbBcCaA
16	-	-	bd	b $\leftarrow$	DBcCaA
17	-	-	-	$\rightarrow$ bd	dDbBcCaA

Remarque : si n représente le nombre de couples souhaitant traverser une rivière avec une barque à deux places et qu'il y a un îlot entre les deux rives, tous les couples peuvent effectuer la traversée et le nombre minimum de traversées correspond à $6n - 7$ lorsque $n \geq 2$.