

**106. Les chaises \* \*\* \*\*\* \*\*\*\***

- a) Cinq chaises sont alignées côte à côte et elles ne peuvent pas être déplacées. Deux femmes occupent les deux chaises de gauche et deux hommes les deux chaises de droite. Entre le groupe des femmes et celui des hommes, il y a donc une chaise inoccupée. Les femmes souhaitent prendre les places des hommes et les hommes celles des femmes. Il n'y a qu'une personne pouvant se déplacer à la fois (chaque mouvement d'une personne = 1 déplacement), selon les règles suivantes :
- Les femmes ne peuvent aller qu'en direction de la position des hommes au départ et les hommes qu'en direction de la position des femmes au départ.
  - Pour se déplacer, chacun ne peut aller que sur une chaise inoccupée à côté de celle où il est assis ou sur une chaise inoccupée en passant par-dessus une seule personne.
- Comment vont-ils s'y prendre pour effectuer les changements souhaités ?
- b) Même question pour sept chaises avec, au départ, trois femmes à gauche et trois hommes à droite.
- c) Combien de déplacements, au minimum, seraient nécessaires dans les mêmes conditions s'il y avait 9 chaises avec, au départ, quatre femmes à gauche et quatre hommes à droite ?
- d) Combien de déplacements, au minimum, seraient nécessaires dans les mêmes conditions s'il y avait un nombre impair  $n$  ( $n \geq 3$ ) de chaises avec, au départ,  $\frac{n-1}{2}$  femmes à gauche et  $\frac{n-1}{2}$  hommes à droite ?

**Solutions**

Dans les deux tableaux ci-dessous, à chaque ligne, la personne qui va se déplacer est notée en gras. Quelques essais montrent que pour ne pas être bloqués, mises à part les positions initiale et finale, il ne faut jamais que deux hommes ou deux femmes soient assis l'un à côté de l'autre. Ainsi, à la 2ème ligne de a), il ne faudrait pas que  $F_2$  viennent s'asseoir à côté de  $F_1$ . A la 3ème ligne de b), seuls  $F_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  peuvent se déplacer. Si  $F_1$  se met à côté de  $H_2$ , soit  $F_2$  viendra à côté de  $F_1$  et plus personne de pourra bouger, soit  $H_2$  passe au-dessus de  $F_1$  et les positions seront bloquées deux déplacements plus tard. Si  $H_3$  passe par-dessus  $H_2$ , plus personne ne pourra bouger. Donc, c'est forcément  $H_2$  qui doit se déplacer.

De manière arbitraire, nous avons décidé que c'est une femme qui se déplace la première.

- a) Soit  $F_1$  et  $F_2$ , les femmes, et  $H_1$  et  $H_2$ , les hommes.

1	$F_2$	<b><math>F_1</math></b>		$H_1$	$H_2$
2	$F_2$		$F_1$	<b><math>H_1</math></b>	$H_2$
3	$F_2$	$H_1$	$F_1$		<b><math>H_2</math></b>
4	$F_2$	$H_1$	<b><math>F_1</math></b>	$H_2$	
5	<b><math>F_2</math></b>	$H_1$		$H_2$	$F_1$
6		<b><math>H_1</math></b>	$F_2$	$H_2$	$F_1$
7	$H_1$		$F_2$	<b><math>H_2</math></b>	$F_1$
8	$H_1$	$H_2$	<b><math>F_2</math></b>		$F_1$
	$H_1$	$H_2$		$F_2$	$F_1$

Il faut 8 déplacements : 1 femme, puis 2 hommes, puis 2 femmes, puis 2 hommes, puis 1 femme.

b) Soit  $F_1, F_2$  et  $F_3$ , les femmes, et  $H_1, H_2$  et  $H_3$ , les hommes.

1	$F_3$	$F_2$	$F_1$		$H_1$	$H_2$	$H_3$
2	$F_3$	$F_2$		$F_1$	$H_1$	$H_2$	$H_3$
3	$F_3$	$F_2$	$H_1$	$F_1$		$H_2$	$H_3$
4	$F_3$	$F_2$	$H_1$	$F_1$	$H_2$		$H_3$
5	$F_3$	$F_2$	$H_1$		$H_2$	$F_1$	$H_3$
6	$F_3$		$H_1$	$F_2$	$H_2$	$F_1$	$H_3$
7		$F_3$	$H_1$	$F_2$	$H_2$	$F_1$	$H_3$
8	$H_1$	$F_3$		$F_2$	$H_2$	$F_1$	$H_3$
9	$H_1$	$F_3$	$H_2$	$F_2$		$F_1$	$H_3$
10	$H_1$	$F_3$	$H_2$	$F_2$	$H_3$	$F_1$	
11	$H_1$	$F_3$	$H_2$	$F_2$	$H_3$		$F_1$
12	$H_1$	$F_3$	$H_2$		$H_3$	$F_2$	$F_1$
13	$H_1$		$H_2$	$F_3$	$H_3$	$F_2$	$F_1$
14	$H_1$	$H_2$		$F_3$	$H_3$	$F_2$	$F_1$
15	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$F_3$		$F_2$	$F_1$
	$H_1$	$H_2$	$H_3$		$F_3$	$F_2$	$F_1$

Il faut 15 déplacements : 1 femme, puis 2 hommes, puis 3 femmes, puis 3 hommes, puis 3 femmes, puis 2 hommes, puis 1 femme.

- c) Selon ce qui a été vu aux deux exercices précédents, on peut aisément deviner les déplacements :  $1 F + 2 H + 3 F + 4 H + 4 F + 4 H + 3 F + 2 H + 1 F = \mathbf{24 \text{ déplacements}}$ .
- d) Etablissons le tableau suivant dont le nombre de déplacements a été trouvé pour 5, 7 et 9 chaises. Il est facile de découvrir le nombre de déplacements pour 11 et 13 chaises : + 5 pour aller de 3 à 8 ; + 7 pour aller de 8 à 15 ; + 9 pour aller de 15 à 24 ; etc.

Nombre de chaises	3	5	7	9	11	13	n
Nombre de déplacements	3	8	15	24	35	48	...

Pour trouver la fonction polynomiale liant le nombre de chaises (n) au nombre de déplacements, nous allons utiliser la méthode des différences largement décrite dans mes deux livres ainsi que dans les notes de la rubrique E de mon site.

La fonction recherchée est du type  $an^2 + bn + c$ .

On sait que :

$$f(3) = 9a + 3b + c = 3$$

$$f(5) = 25a + 5b + c = 8$$

$$f(7) = 49a + 7b + c = 15$$

La résolution de ce système d'équations à trois inconnues donne  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  et  $c = \frac{-3}{4}$ .

$$\text{Alors, } f(n) = \frac{n^2 + 2n - 3}{4}.$$

Le nombre de déplacements en fonction du nombre x d'hommes (ou de femmes) assis sur les chaises est égal à  $x(x + 2)$ .