106. Les chaises * ** *** ****

a) Cinq chaises sont alignées côte à côte et elles ne peuvent pas être déplacées. Deux femmes occupent les deux chaises de gauche et deux hommes les deux chaises de droite. Entre le groupe des femmes et celui des hommes, il y a donc une chaise inoccupée. Les femmes souhaitent prendre les places des hommes et les hommes celles des femmes. Il n'y a qu'une personne pouvant se déplacer à la fois (chaque mouvement d'une personne = 1 déplacement), selon les règles suivantes :
   - Les femmes ne peuvent aller qu'en direction de la position des hommes au départ et les hommes qu'en direction de la position des femmes au départ.
   - Pour se déplacer, chacun ne peut aller que sur une chaise inoccupée à côté de celle où il est assis ou sur une chaise inoccupée en passant par-dessus une seule personne.

   Comment vont-ils s'y prendre pour effectuer les changements souhaités ?

b) Même question pour sept chaises avec, au départ, trois femmes à gauche et trois hommes à droite.

c) Combien de déplacements, au minimum, seraient nécessaires dans les mêmes conditions s'il y avait 9 chaises avec, au départ, quatre femmes à gauche et quatre hommes à droite ?

d) Combien de déplacements, au minimum, seraient nécessaires dans les mêmes conditions s'il y avait un nombre impair n ($n \geq 3$) de chaises avec, au départ, $\frac{n-1}{2}$ femmes à gauche et $\frac{n-1}{2}$ hommes à droite ?

Solutions

Dans les deux tableaux ci-dessous, à chaque ligne, la personne qui va se déplacer est notée en gras. Quelques essais montrent que pour ne pas être bloqués, mises à part les positions initiale et finale, il ne faut jamais que deux hommes ou deux femmes soient assis l'un à côté de l'autre. Ainsi, à la 2ème ligne de a), il ne faudrait pas que F_2 viennent s'asseoir à côté de F_1. A la 3ème ligne de b), seuls F_1, H_2 et H_3 peuvent se déplacer. Si F_1 se met à côté de H_2, soit F_2 viendra à côté de F_1 et plus personne de pourra bouger, soit H_2 passe au-dessus de F_1 et les positions seront bloquées deux déplacements plus tard. Si H_3 passe par-dessus H_2, plus personne ne pourra bouger. Donc, c'est forcément H_2 qui doit se déplacer.

De manière arbitraire, nous avons décidé que c'est une femme qui se déplace la première.

a) Soit F_1 et F_2, les femmes, et H_1 et H_2, les hommes.

1	F_2	$\mathbf{F_1}$		H_1	H_2
2	F_2		F_1	$\mathbf{H_1}$	H_2
3	F_2	H_1	F_1		$\mathbf{H_2}$
4	F_2	H_1	$\mathbf{F_1}$	H_2	
5	$\mathbf{F_2}$	H_1		H_2	F_1
6		$\mathbf{H_1}$	F_2	H_2	F_1
7	H_1		F_2	$\mathbf{H_2}$	F_1
8	H_1	H_2	$\mathbf{F_2}$		F_1
	H_1	H_2		F_2	F_1

Il faut 8 déplacements : 1 femme, puis 2 hommes, puis 2 femmes, puis 2 hommes, puis 1 femme.

b) Soit F_1, F_2 et F_3, les femmes, et H_1, H_2 et H_3, les hommes.

1	F_3	F_2	$\mathbf{F_1}$		H_1	H_2	H_3
2	F_3	F_2		F_1	$\mathbf{H_1}$	H_2	H_3
3	F_3	F_2	H_1	F_1		$\mathbf{H_2}$	H_3
4	F_3	F_2	H_1	$\mathbf{F_1}$	H_2		H_3
5	F_3	$\mathbf{F_2}$	H_1		H_2	F_1	H_3
6	$\mathbf{F_3}$		H_1	F_2	H_2	F_1	H_3
7		F_3	$\mathbf{H_1}$	F_2	H_2	F_1	H_3
8	H_1	F_3		F_2	$\mathbf{H_2}$	F_1	H_3
9	H_1	F_3	H_2	F_2		F_1	$\mathbf{H_3}$
10	H_1	F_3	H_2	F_2	H_3	$\mathbf{F_1}$	
11	H_1	F_3	H_2	$\mathbf{F_2}$	H_3		F_1
12	H_1	$\mathbf{F_3}$	H_2		H_3	F_2	F_1
13	H_1		$\mathbf{H_2}$	F_3	H_3	F_2	F_1
14	H_1	H_2		F_3	$\mathbf{H_3}$	F_2	F_1
15	H_1	H_2	H_3	$\mathbf{F_3}$		F_2	F_1
	H_1	H_2	H_3		F_3	F_2	F_1

Il faut 15 déplacements : 1 femme, puis 2 hommes, puis 3 femmes, puis 3 hommes, puis 3 femmes, puis 2 hommes, puis 1 femme.

c) Selon ce qui a été vu aux deux exercices précédents, on peut aisément deviner les déplacements : 1 F + 2 H + 3 F + 4 H + 4 F + 4 H + 3 F + 2 H + 1 F = **24 déplacements**.

d) Etablissons le tableau suivant dont le nombre de déplacements a été trouvé pour 5, 7 et 9 chaises. Il est facile de découvrir le nombre de déplacements pour 11 et 13 chaises : + 5 pour aller de à 3 à 8 ; + 7 pour aller de 8 à 15 ; + 9 pour aller de 15 à 24 ; etc.

Nombre de chaises	3	5	7	9	11	13	n
Nombre de déplacements	3	8	15	24	35	48	…

Pour trouver la fonction polynomiale liant le nombre de chaises (n) au nombre de déplacements, nous allons utiliser la méthode des différences largement décrite dans mes deux livres ainsi que dans les notes de la rubrique E de mon site.

La fonction recherchée est du type $an^2 + bn + c$.

On sait que :

$f(3) = 9a + 3b + c = 3$

$f(5) = 25a + 5b + c = 8$

$f(7) = 49a + 7b + c = 15$

La résolution de ce système d'équations à trois inconnues donne $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{-3}{4}$.

Alors, $f(n) = \frac{n^2 + 2n - 3}{4}$.

Le nombre de déplacements en fonction du nombre x d'hommes (ou de femmes) assis sur les chaises est égal à $x(x + 2)$.

– Augustin Genoud, janvier 2020 –