105. Le classement des billes ** * ******

Jules possède des billes d'apparence identique. Il sait qu'elles sont toutes de masses légèrement différentes. Il aimerait les classer, dans l'ordre, de la plus lourde à la plus légère. Pour cela, il ne dispose que d'une petite balance à plateaux sur laquelle il ne peut mettre qu'une bille de chaque côté. Chaque utilisation de la balance constitue un test.

Dans le pire des cas et en appliquant la meilleure stratégie, combien de tests doit-il effectuer, au minimum ?

a) Pour classer 3 billes.
b) Pour classer 4 billes.
c) Pour classer 5 billes.

Solutions

Quelques codes :

- a > b : la bille a est plus lourde que la bille b
- c↔d : test entre les billes c et d
- Les classements seront notés selon le schéma ci-dessous où b > d > a > c et f > e.

b	f
d	e
a	
c	

a) Soit a, b et c, les trois billes de Jules.
1^er^ test : a↔b. Supposons que b > a.
2^ème^ test : b↔c.
Si c > b, le classement est terminé : c > b > a.
Si c < b, Jules doit procéder à un 3^ème^ test (a↔c) pour terminer le classement.
Dans le pire des cas, Jules doit effectuer **3 tests**.

b) Soit a, b, c et d, les quatre billes de Jules.
1^er^ test : a↔b. Supposons que a > b.
1^er^ test : c↔d. Supposons que c > d.
Situation schématisée après deux tests :

a	c
b	d

3^ème^ test : a↔c (Jules compare les billes les plus lourdes des deux groupes).
Si a > c, Jules teste b↔c (4^ème^ test). Jules se retrouve devant deux situations possibles :

1	
a	c
b	d
c	

2	
a	c
c	d
b	

Dans le 1^er^ cas, le classement est terminé : a > b > c > d.
Dans le second cas, Jules doit procéder à un 5^ème^ test (b↔d) pour terminer le classement.

Si a < c, Jules se retrouve devant la situation suivante :

c	c
a	d
b	

Dans ce cas, Jules teste b↔d (4ème test) et, si nécessaire, a↔d.

Dans le pire des cas, Jules doit effectuer **5 tests**.

c) Soit a, b, c, d et e, les cinq billes de Jules.
1er test : a↔b. Supposons que a > b.
2ème test : c↔d. Supposons d > c.
Situation schématisée après deux tests :

a	d	e
b	c	

3ème test : a↔d (Jules compare les billes les plus lourdes des groupes de deux billes).

a) Si d > a, la situation schématisée est la suivante :

d	d	e
a	c	
b		

Jules teste a↔e. Selon le résultat, il teste d↔e ou b↔e.
Après cinq tests, Jules obtient une des quatre schémas suivants :

1		2		3		4	
e	d	d	d	d	d	d	d
d	c	e	c	a	c	a	c
a		a		e		b	
b		b		b		e	

1er cas : Jules teste a↔c et, si nécessaire, b↔c pour finir le classement. Sept tests en tout.
2ème cas : Jules teste a↔c, et e↔c ou b↔c pour finir le classement. Sept tests en tout.
3ème cas : Jules teste e↔c, et a↔c ou b↔c pour finir le classement. Sept tests en tout.
4ème cas : Jules teste b↔c, et a↔c ou e↔c pour finir le classement. Sept tests en tout.

b) Si d < a, Jules peut dessiner le schéma suivant :

a	a	e
b	d	
	c	

Par le même procédé qu'en a), Jules va classer la bille e parmi les billes du groupe de 3 billes. Il va donc d'abord tester d↔e, et selon le résultat, il teste a↔e ou c↔e, etc.

Dans le pire des cas, Jules doit effectuer **7 tests**.

Notes

- Nous avons affaire ici à un problème d'optimisation dans lequel il est toujours très difficile d'apporter les preuves que les solutions trouvées sont bien les meilleures. A la question c), de nombreuses personnes pourraient croire que la réponse est 8 car il est relativement facile d'arriver à classer 5 billes en 8 tests.

  Par exemple, on peut penser que pour classer n billes, il faut d'abord classer n − 1 billes, que pour classer n − 1 billes, il faut d'abord classer n − 2 billes, que pour classer n − 2 billes, il faut d'abord classer n − 3 billes. Etc.

Pour classer 2 billes, il faut 1 test. Supposons b > a.

Pour classer 3 billes, on a au départ (b,a) + (c). Il faut tester b↔c et a↔c. Trois tests en tout dans le pire des cas. Supposons que l'on ait obtenu b > c > a.

Pour tester 4 billes, on a au départ (b,c,a) + (d). Il faut tester b↔c, puis selon le résultat b↔d ou a↔d. Cinq tests en tout dans le pire des cas. Supposons que l'on ait obtenu b > d > c > a.

Pour tester 4 billes, on a au départ (b,d,c,a) + (e). Il faut tester d↔e, puis selon le résultat b↔e ou c↔e. Si l'on doit tester c↔e, un test supplémentaire (a↔e) est peut-être nécessaire. Huit tests en tout dans le pire des cas.

- Je souhaite bon courage à ceux qui aimeraient aller plus loin. Le nombre de tests correspond au minimum, dans le pire des cas.

Nombre de billes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de tests	1	3	5	7	10	13	16	19	22	26

Voir aussi https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_sort

– Augustin Genoud, décembre 2019 –