102. Les ancêtres de Lucie ** ***

La généalogie ascendante a pour but de rechercher les ancêtres d'un individu, tandis que la généalogie descendante sert à retrouver les descendants d'un individu.

Pour les êtres humains, on admet qu'une génération correspond à 25 ans. Dans un cas parfait, un enfant (appelons-la Lucie) née en l'an 2000, aurait ses deux parents nés en 1975, ses quatre grands-parents nés en 1950, ses huit arrière-grands-parents nés en 1925, et ainsi de suite.

Lucie s'est intéressée aux individus de son arbre généalogique ascendant en se considérant elle-même de la génération 1, ses parents de la génération 2, ses grands-parents de la génération 3, etc.

a) A quelle génération correspondent les ancêtres de Lucie nés en 1900 ?
b) Combien d'ancêtres de Lucie compte la 7ème génération ?
c) Combien d'ancêtres de Lucie compte la génération née en 1200 ?
d) Combien d'individus se trouvent sur l'arbre généalogique de Lucie, de l'an 2000 à l'an 1200 (bornes comprises) ?
e) Combien d'individus se trouvent sur l'arbre généalogique de Lucie, de l'an 1300 à l'an 1200 (bornes comprises) ?
f) La population mondiale sur Terre en l'an 1200 est estimée à 350 millions. Comparez le nombre d'ancêtres de Lucie nés en 1200 (question c) et le nombre d'individus vivant sur notre planète en 1200. Quelle conclusion pouvez-vous en tirer ?

Solutions

Dans le tableau suivant, la ligne « Ancêtres » correspond au nombre d'ancêtres nés en l'an « Année ». La ligne « Total » indique le nombre total d'individus sur l'arbre généalogique ascendant de Lucie, de l'an 2000 jusqu'à l'année indiquée dans « Année ».

Comme il y a 4 générations en 100 ans, le nombre de générations augmente de 4 tous les 100 ans. D'autre part, si n représente les années qui sont des multiples de 25 inférieurs à 2000, alors les générations correspondent à la relation $\frac{2000 - n}{25} + 1$.

Dans la colonne A, on trouve les relations permettant de trouver les « Ancêtres » et le « Total » en fonction de la génération (x).

Année	2000	1975	1950	1925	1900	A	1325	1300	1200
Génération	1	2	3	4	5	x	28	29	33
Ancêtre	1	2	4	8	16	2^{x-1}	$\cong$ 134 millions	$\cong$ 268 millions	$\cong$ 4295 millions
Total	1	3	7	15	31	$2^{x}-1$	$\cong$ 268 millions	$\cong$ 536 millions	$\cong$ 8590 millions

a) **5ème génération**.
b) Le nombre d'ancêtres à chaque génération est la suite 1, 2, 4, 8, 16, ... Le nombre d'ancêtres à la 7ème génération est donc **64**, ce qui correspond à 2^6.
c) L'an 1200 correspond à la 33ème génération, alors le nombre d'ancêtres est égal à $2^{32} \cong$ **4295 millions**. Le nombre est tellement grand qu'on l'a arrondi au million près, ce que l'on fera également par la suite.
d) Nombre d'individus = $2^{33} \cong$ **8590 millions**. Le moins 1 de la formule $2^{33} - 1$ ne sert plus à rien avec de si grands nombres (idem dans l'exercice suivant).

e) Le nombre cherché d'individus correspond au nombre total d'individus en 1200 moins le nombre total d'individus en 1325, soit $2^{33} - 2^{28} \cong$ **8322 millions**.

On aurait aussi pu additionner le nombre d'ancêtres en 1300 plus le nombre d'ancêtres en 1275 plus le nombre d'ancêtres en 1250, etc.

f) En 1200, les ancêtres de Lucie comptaient environ 4295 millions individus. Or, le nombre de personnes vivant sur notre planète à cette époque est estimé à 350 millions !

En fait, lorsqu'un individu dessine son arbre généalogique ascendant et qu'il note sur chaque branche les noms et prénoms de ses ancêtres, il s'aperçoit assez vite qu'au bout de quelques générations les branches se croisent. La 7ème génération devrait compter 64 individus. En réalité, il y en aura très certainement quelques-uns en moins.

D'autre part, si Anne, née elle aussi en l'an 2000 et qui n'a apparemment aucun lien de parenté avec son amie Lucie, construisait son arbre généalogique ascendant, il est fort possible que certains de ses ancêtres éloignés soient les mêmes que ceux de Lucie.

Si chaque personne sur notre planète se mettait à construire son arbre généalogique ascendant, on verrait les branches se croiser par milliards.

En conclusion, plus Lucie « remonte » dans le temps, plus les nombres de ses ancêtres calculés de manière mathématique s'éloignent de la réalité. Cet exercice a le mérite de nous rendre attentifs au fait qu'un modèle mathématique, correct dans un certain espace, ne l'est plus dans d'autres. Il va nous permettre aussi de dire un petit mot sur les suites géométriques.

Remarquons encore que la population mondiale sur Terre, en 2019, est d'environ 7700 millions d'individus. On estime qu'elle était de 200 millions en l'an 0, de 260 millions en l'an 1000, de 1000 millions en 1800, de 1700 millions en l900 et de 6100 millions en l'an 2000. L'évolution du nombre d'habitants sur notre Terre a longtemps suivi un accroissement modéré avant de devenir une courbe exponentielle à partir de l'an 1800.

On appelle **suite géométrique** une suite de nombres pour laquelle, à partir d'un premier terme, chaque terme qui suit est obtenu en multipliant le terme précédent par le même nombre (ce nombre est appelé raison et est souvent noté q).

Appelons U_1 le 1er terme non nul d'une suite, U_2 le 2ème terme, U_n le nième terme, etc. On a alors les formules suivantes :

1) Le nième terme de la suite est égal à $U_1 \cdot q^{n-1}$.
2) La somme des n premiers termes est égale à $U_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.
3) La somme de n termes consécutifs dont le 1er est « a » est égale à $a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Le nombre d'ancêtres de Lucie (1, 2, 4, 8, 16,…) représente une suite géométrique de raison q = 2.

La première formule nous aurait permis de répondre à la question b), en effectuant $1 \cdot 2^{7-1}$.

La deuxième formule nous aurait permis de répondre à la question d), en calculant $1 \cdot \frac{2^{33} - 1}{2 - 1}$.

A la question e), il y a 5 termes allant du 29ème au 33ème. La troisième formule nous permet d'obtenir la solution, avec q = 2, n = 5 et a = $2^{28} \cong$ 268,44. Alors, $268{,}44 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \cong$ 8322 millions.

– Augustin Genoud, septembre 2019 –