28e championnat des jeux mathématiques et logiques

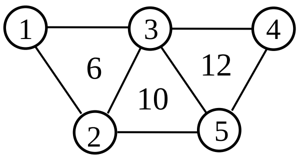
Qualification régionale valaisanne - 20 novembre 2013

Solutions

1. Le plus vieux

Supposons que le perroquet ait 10 ans, le chien 7 ans et le chat 5 ans, alors toutes les affirmations sont correctes. Le **<u>perroquet</u>** est donc le plus vieux.

2. Les cercles



3. Les chiffres

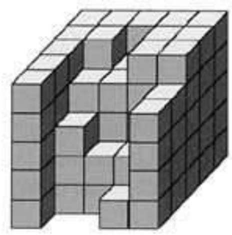
Reprenons le décompte selon Aline : 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, 102, 103. Cela fait **<u>19 livres</u>**.

4. Les noix

Il y aura obligatoirement 7 noix dans la boîte G. Les boîtes B, D et F ne pourront contenir qu'un nombre pair de noix. Alors, il y aura forcément 2 noix dans la boîte F. En E, il ne reste que la possibilité d'y mettre 5 noix. D contiendra nécessairement 8 noix. Il ne reste plus que 3 noix pour la boîte C et 6 noix pour la B.

A	B	C	D	E	F	G	H
1	**6**	**3**	**8**	**5**	**2**	**7**	4

5. Le cube



Complétons le cube, de bas en haut :

A la première rangée du bas, il faut mettre 2 cubes.

A la 2ème rangée, il faut en mettre 3. A la 3ème rangée, il faut en mettre 5.

A la 4ème rangée, il faut en 6. A la dernière rangée, il faut en mettre 11.

En tout, il faut ajouter **<u>27 cubes</u>** (2 + 3 + 5 + 6 + 11).

6. Les pièces

Soit A, les pièces avec le côté « face » au-dessus et B, celles qui sont avec le côté « pile » au-dessus. Les pièces qui vont être retournées sont encadrées.

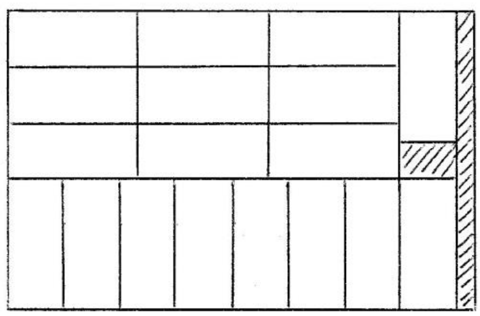
Départ : $\boxed{\text{A A A A}}$ A A A A A A.

Après le 1er coup : B B B $\boxed{\text{B A A A}}$ A A A.

Après le 2ème coup : B B B $\boxed{\text{A}}$ B B B $\boxed{\text{A A A}}$.

Après le 3ème coup : B B B B B B B B B B. Il faut **<u>3 coups</u>** pour que toutes les pièces soient du côté « pile » au-dessus.

7. Les étiquettes



En disposant les étiquettes selon le croquis ci-contre, on voit qu'on peut en mettre **<u>18</u>** (les résidus sont hachurés).

Une erreur consisterait à diviser l'aire de la grande feuille (16 · 25 = 400) par l'aire d'une étiquette (3 · 7 = 21), ce qui donne environ 19,04, et de croire que l'on peut dont découper 19 étiquettes. Ce type de problèmes peut facilement devenir très compliqué et il n'y a pas de méthodes mathématiques pour obtenir les solutions. Ici, la dimension 16 cm peut nous mettre sur la voie car 16 = 7 + 3 + 3 + 3.

8. L'âge des petits-fils

2013 = 1 · 3 · 11 · 61. La somme 75 est obtenue avec les nombres 3, 11 et 61. Les deux petits-fils ont **3** et **11 ans**.

9. Les assiettes

Comme on cherche le nombre minimum d'assiettes, il faut faire en sortes qu'il y ait très peu d'écart entre la pile la plus basse et la pile la plus haute. 2013 divisé par 7 est égal à environ 287,57. Les piles doivent contenir environ 287 assiettes.

Supposons que la plus haute pile contienne 289 assiettes. Les 6 autres pourraient contenir au plus 288, 287, 286, 285, 284 et 283 assiettes. Cela ferait 2002 assiettes en tout. Impossible d'arriver à 2013 avec la plus haute pile qui en compte 289.

Si l'on fait de même en supposant que la plus haute ait 290 assiettes, on obtient un total de 2009 assiettes. C'est toujours insuffisant.

Si la plus haute contient 291 assiettes, on est sûr d'arriver à un total de 2013 assiettes. Par exemple, c'est le cas si les autres piles comptent 282, 286, 287, 288, 289 et 290 assiettes.

Le nombre minimum d'assiettes est **291**.

10. Le banquet

Dans le schéma ci-dessous, la table est linéaire. On ne doit pas oublier qu'en réalité, elle est ronde. En mettant 8 femmes sur la gauche (de F_1 à F_8), on a bien 7 femmes qui ont une femme à leur droite. Les 12 femmes (de 8 à 19) ont bien un homme à leur droite. La situation est conforme aux deux premières affirmations.

F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7 F_8 H F_9 H F_{10} H F_{11} H F_{12} H F_{13} H F_{14} H F_{15} H F_{16} H F_{17} H F_{18} H F_{19} H

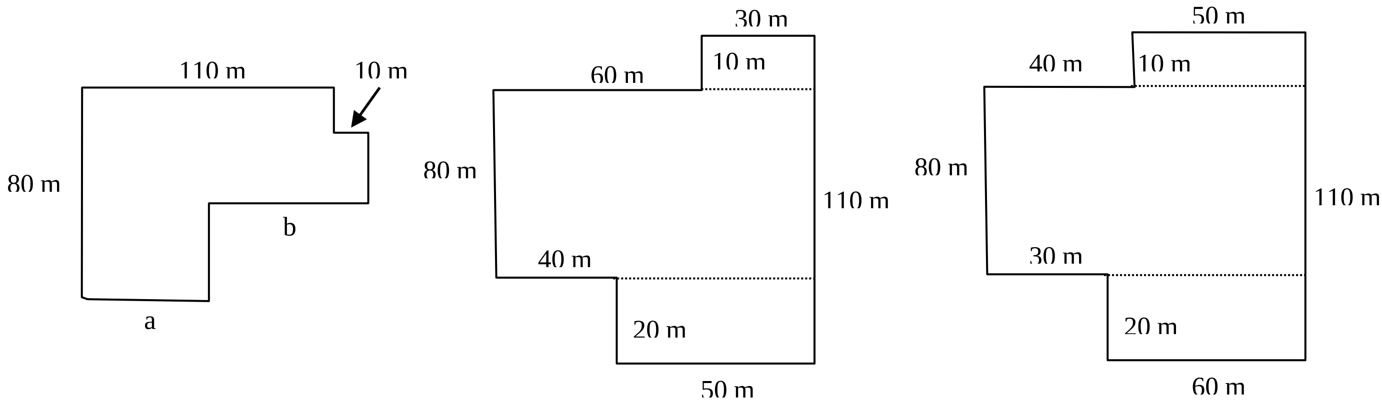
Actuellement, on a 12 hommes sur 12 qui ont une femme à leur droite (le dernier homme à droite a F_1 à sa droite). Il en faut 3 sur 4 ou 6 sur 8 ou 9 sur 12 ou 12 sur 16. En ajoutant encore 4 hommes à droite, on obtient la situation suivante où 12 hommes sur 16 ont une femme à leur droite. Les trois affirmations sont maintenant respectées.

F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7 F_8 H F_9 H F_{10} H F_{11} H F_{12} H F_{13} H F_{14} H F_{15} H F_{16} H F_{17} H F_{18} H F_{19} H H H H H

Il y a en tout 19 femmes et 16 hommes, soit **35 personnes** autour de cette table.

11. La château

Le périmètre de l'enceinte mesure 400 m. Elle pourrait avoir la forme de la figure de gauche qui fait bien 400 m. Il faudrait que a + b = 120 m, ce qui est impossible avec les mesures disponibles. Elle



pourrait aussi avoir la forme de la figure du milieu et dans ce cas toutes les mesures jouent. En partageant cette enceinte en 3 rectangles, on obtient une aire de 8500 m^2 (90 · 80 + 30 · 10 + 50 · 20). Mais cette aire n'est pas encore maximale. Elle le devient en groupant les plus grandes mesures entre elles (figure de droite), soit le 60 m avec le 20 m et le 50 m avec le 10 m.

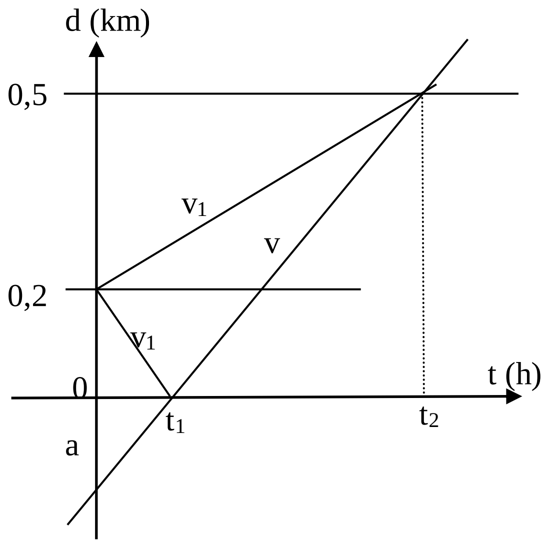
L'aire mesure alors **<u>8900</u> m²** (90 · 80 + 60 · 20 + 50 · 20).

12. Les cartes

Il faut retourner la carte C. Il faut aussi retourner les cartes A et D car si l'une d'entre elles portait un C sur la face cachée, l'affirmation serait fausse. Il est inutile de retourner la face B car si derrière B apparaît un C, notre affirmation est vraie et si derrière B se trouve une autre lettre que C, l'affirmation ne dit rien. On rappelle que l'affirmation « derrière C se trouve B » n'implique pas « derrière B se trouve C ». Il faut donc retourner les lettres **<u>A</u>, <u>C</u>** et **<u>D</u>**.

13. Le tunnel

Jonathan décide d'aller vers la sortie. Lorsqu'il aura parcouru les 2/5 du tunnel, le train sera à l'entrée du tunnel car s'il avait fait les 2/5 du tunnel en direction de l'entrée, il serait arrivé à l'entrée en même temps que le train. Jonathan est maintenant aux 4/5 du tunnel. Il lui reste à parcourir le 1/5 du tunnel alors que le train doit traverser tout le tunnel, soit les 5/5 du tunnel. Le train va donc 5 fois plus vite que Jonathan, alors Jonathan court à **<u>26,5 km/h</u>** (132,5 : 5).



On peut aussi résoudre cette énigme en tirant des équations du graphique suivant :

On suppose que le coureur a fait 200 m dans le tunnel lorsqu'il entend le bruit du train. Alors, le tunnel mesure 500 m.

a = distance entre le train et l'entrée du tunnel au moment où le coureur entend le bruit du train.

v = vitesse du train

v_1 = vitesse du coureur

Equations :

(1) $v_1 = \frac{0{,}2}{t_1}$ ……….(2) $v_1 = \frac{0{,}3}{t_2}$

(3) $v = \frac{a}{t_1}$ ……… (4) $v = \frac{a + 0{,}5}{t_2}$

De (3), on tire que $t_1 = \frac{a}{v}$

De (4), on tire que $t_2 = \frac{a + 0{,}5}{v}$

Comme $v_1 = \frac{0{,}2}{t_1} = \frac{0{,}3}{t_2}$, on obtient $v_1 = \frac{0{,}2 \cdot v}{a} = \frac{0{,}3 \cdot v}{a + 0{,}5}$, d'où $\frac{2}{a} = \frac{3}{a + 0{,}5}$. De là, on tire que a = 1.

Alors, $v_1 = 0{,}2 \cdot v = 0{,}2 \cdot 132{,}5 = 26{,}5$ km/h.

14. L'addition

	A	B	C	X
	D	E	C	D
	B	B	C	D
	C	A	C	X
=	X	X	X	X

Raisonnons comme s'il n'y avait aucune erreur.

Dans la première colonne, A + D + B + C = X doit être inférieur à 10. Or, 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Donc l'erreur provient d'une des lettres A, B, C ou D et <u>uniquement dans la première colonne</u> (une lettre est fausse dans un seul endroit). Deux de ces lettres sont forcément identiques et les sommes possibles sont, s'il n'y a pas de retenue :

1 + 1 + 2 + 3 = 7	1 + 1 + 2 + 4 = 8	1 + 1 + 2 + 5 = 9
1 + 1 + 3 + 4 = 9	1 + 2 + 2 + 3 = 8	1 + 2 + 2 + 4 = 9
1 + 2 + 3 + 3 = 9		

On voit que X = 7 ou 8 ou 9.

Dans la dernière colonne, on a 2X + 2D = X (ou 10 + X ou 20 + X). Ainsi, X est un nombre pair, donc X = 8. On a alors 16 + 2D = 18 ou 28. On en tire que D = 1 ou 6. Selon la première colonne, D ne peut pas valoir 6. Donc, D = 1 et la somme vaut 18.

A l'avant-dernière colonne, on a 4C + 1 (retenue) qui est impair et X qui est pair. On est bloqué. Pour que ça marche, il faudrait que D = 6. Cela n'est possible que si la lettre D de la première colonne est fausse. Alors, les lettres A, B et C sont justes.

L'avant-dernière colonne devient maintenant 4C + 2 (retenue). Le nombre représentant cette somme doit se terminer par 8. Donc, C = 4 ou 9. Selon la première colonne, C vaut forcément 4. On a maintenant la situation suivante :

	A	B	4	8
	?	E	4	6
	B	B	4	6
	4	A	4	8
=	8	8	8	8

Appelons T le point d'interrogation. De la 2ème colonne, on tire que 2B + E + A + 1 = 8 ou 18.

Premier cas : 2B + E + A = 7 et A + T + B + 4 = 8 (première colonne). De 2B + E + A, on tire que B = 1. De A + T + B = 4, on conclut que T = 1. Alors, A = 2 et E = 3.

Second cas : 2B + E + A = 17 et A + T + B + 4 + 1 = 8. De la seconde égalité, on a A + T + B = 3. Alors T = 0, ce qui est impossible.

Il n'y a qu'une solution possible :

	2	1	4	8
	1	3	4	6
	1	1	4	6
	4	2	4	8
=	8	8	8	8

Le nombre représentant ABCX est <u>**2148**</u>.