21e championnat des jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne – 15 novembre 2006

Solutions

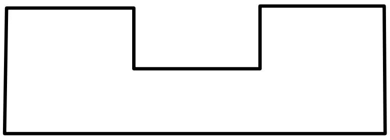
1. Les cases

1	2
3	4

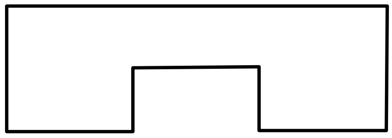
ou

1	3
2	4

2. Le chemin



ou



3. Les lianes

Nombre de lianes de 7m	1	2	3	4	5
Distances parcourues avec les lianes de 7m (m)	7	14	21	28	35
Distances restantes à parcourir	34	27	20	13	6

Seule la distance restante de 20 m peut être atteinte avec des lianes de 4 m. Samuel a besoin de 3 lianes de 7 m et de 5 lianes de 4 m pour atteindre la pierre. Il doit utiliser **8 lianes**.

4. Les cailloux

Au total, il y a 24 cailloux. A la fin, il doit y avoir 6 cailloux par boîte. Les boîtes ont été numérotées de A à B, en allant de gauche à droite. Le tableau suivant montre les échanges pour obtenir 6 cailloux par boîte. Ce n'est pas la seule manière d'échanger les cailloux. Il faut un minimum de **8 coups**.

	Départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Boîte A	1	2	3	4	5	6	6	6	6
Boîte B	9	8	7	6	5	4	5	6	6
Boîte C	9	9	9	9	9	9	8	7	6
Boîte D	5	5	5	5	5	5	5	5	6

5. La baignoire

En 10 minutes, on pourrait remplir 2 baignoires et vider 1 baignoire. Il faut donc **10 minutes** pour en remplir une avec la vidange ouverte.

6. Les timbres

Dans la première colonne du tableau, on met ce que possède Laura à la fin des échanges: 51 timbres italiens et 0 timbre suisse. Avant cette étape, elle possédait 46 timbres italiens et 3 timbres suisses. On continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait un total de 45 timbres. A ce moment-là, Laura avait **9 timbres suisses**.

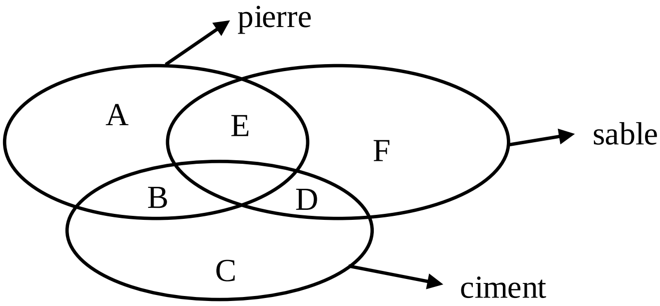
Nombre de timbres italiens	51	46	41	36
Nombre de timbres suisses	0	3	6	9
Nombre total de timbres	51	49	47	45

7. Les cases

Les nombres 1 à 9 occupent 9 cases. Les nombres 10 à 99 occupent 180 cases (90 fois 2). Il reste 1817 cases (2006 – 9 – 180) qui devront être occupées par des nombres à 3 chiffres. 1817 divisé par 3 = 605 avec 2 comme reste. 99 + 605 = 704. Le 4 de 704 occupe la case 2004. C’est un **<u>7</u>** qui occupera la case 2005 et un **<u>0</u>** qui occupera la case 2006.

8. Le vendeur

Faisons le schéma suivant où il n’y a aucun élément faisant partie des trois ensembles. On a les quatre égalités suivantes :



A + B + C + D + E + F = 19 (1)

A + B + E = 17 (2)

E + F + D = 13 (3)

B + D + C = 8 (4)

En soustrayant (2) de (1), on obtient C + D + F = 2 (5)

Dans le tableau ci-dessous, mettons d’abord les six cas possible concernant les valeurs de C, D et F, d’après l’égalité (5).

Grâce à l’égalité (3), on peut ensuite compléter la colonne E. Grâce à l’égalité (4), on peut ensuite compléter la colonne B. Et enfin, si possible, remplir la colonne A grâce à l’égalité (2).

Seule la ligne où A = 0 est possible.

On peut conclure que **<u>2 personnes</u>** (D) ont acheté à la fois du sable et du ciment.

C	D	F	E	B	A
2	0	0	13	6	impossible
0	2	0	11	6	0
0	0	2	11	8	impossible
1	1	0	12	6	impossible
1	0	1	12	7	impossible
0	1	1	11	7	impossible

On aurait pu faire plus simple : (2) + (3) + (4) = A + 2B + C + 2D + 2E + F = 38 (6). En faisant (6) – (1), on a B + D + E = 19. D’après (1), on a A = C = F = 0. Selon (5), C + D + F = 2. Alors, D = 2.

9. La mule

Illustrons la situation par le croquis suivant :

40’	7 km		60’
1/3 de B à P	2/3 de B à P	2/3 de P à Q	1/3 de P à Q

B P Q

1/3 de B à P = 40’, alors 2/3 de B à P = 80’. 1/3 de P à Q = 60’, alors 2/3 de B à P = 120’

7 km = 80’ + 120’ = 200’. Temps de B à Q = 40’ + 200’ + 60’ = 300’.

200’ = 7 km, alors 300’ = **<u>10,5 km</u>**.

Remarque : les données 40’ et 60’ sont superflues mais le problème serait plus difficile à résoudre (x + y = 7 km, $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=3{,}5$ km)

10. Les lunes

Il est possible de dessiner les cercles puis de les diviser respectivement par 5 et 6…

On peut aussi calculer l'angle formé par TE et TM :

1 jour : 1/5 de 360° + 1/6 de 360° = 132°.

2 jours : 2/5 de 360° + 2/6 de 360° = 264°.

31 jours : 31/5 de 360° + 31/6 de 360° = 4092°.

Il y a une éclipse tous les 360°, alors 4092 : 360 = 11,36… donc **11 éclipses**.

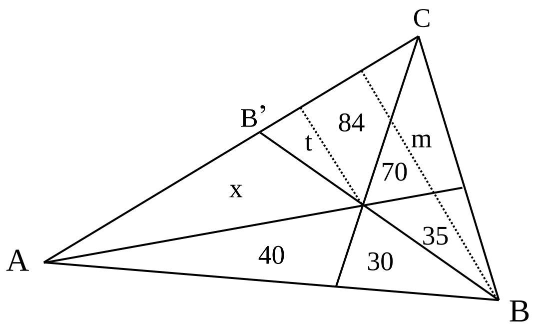
11. Le nombre au carré

Le nombre donné comporte 17 chiffres. Or, $100'000'000^2 = \left(10^8\right)^2 = 10^{16}$ qui est un nombre de 17 chiffres. Le nombre cherché est donc légèrement supérieur à 100'000'000 et se termine soit par 9, soit par 1. Le fait que $11^2 = 121$ peut nous mettre sur la piste, de même que $111^2 = 12321$.
Solution : **111'111'111**

12. Les triangles

Soit x, l'aire du petit triangle dont l'aire est manquante et t, une de ses hauteurs.

Soit m, la hauteur issue de B. On a alors :



$$x = B'A \cdot \frac{t}{2} \quad (1)$$

$$84 = B'C \cdot \frac{t}{2} \quad (2)$$

$$x + 40 + 30 = B'A \cdot \frac{m}{2} = x + 70 \quad (3)$$

$$84 + 70 + 35 = B'C \cdot \frac{m}{2} = 189 \quad (4)$$

De (1) et (2), on obtient $\frac{x}{84} = \frac{B'A}{B'C}$ (5). De (3) et (4), on obtient $\frac{x+70}{189} = \frac{B'A}{B'C}$ (6).

de (5) et (6), on tire que $\frac{x}{84} = \frac{x+70}{189} \Rightarrow 189x = 84x + 5880 \Rightarrow x = 56\ \text{cm}^2$

Aire totale : 56 + 40 + 30 + 35 + 70 + 84 = **315 cm²**.

13. Le motard

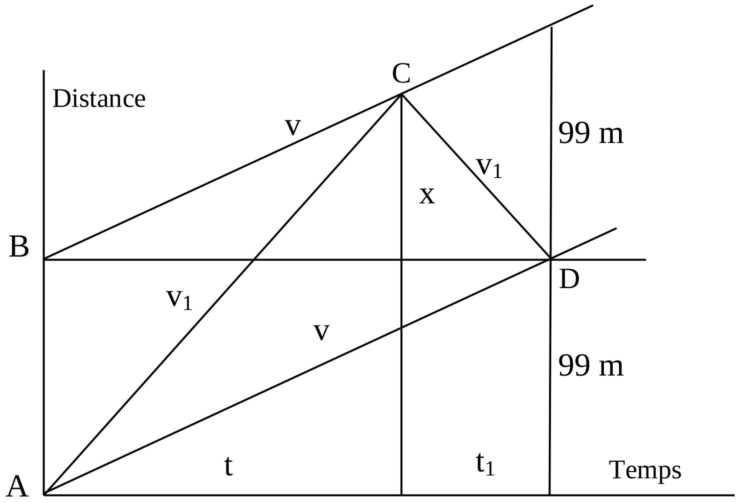
Considérons le peloton comme un segment AB de 99 m de long qui se déplace parallèlement à l'ordonnée. B représente l'avant du peloton et A l'arrière.
v = vitesse du peloton et v_1 = vitesse de la moto (elle fait demi-tour au point C et va ensuite vers D)
Selon le croquis qui suit, on tire les équations suivantes :

a) $v = \frac{x}{t}$ b) $v = \frac{99}{t + t_1}$ c) $v_1 = \frac{x + 99}{t}$ d) $v_1 = \frac{x}{t_1}$ e) $d = 2x + 99$

De a et b, on obtient $\frac{x}{t} = \frac{99}{t + t_1}$. De c, on tire $t = \frac{x + 99}{v_1}$. De d, on obtient $t_1 = \frac{x}{v_1}$.

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{x+99}{v_1}} = \frac{99}{\frac{x+99}{v_1}+\frac{x}{v_1}} \Rightarrow \frac{x}{x+99} = \frac{99}{2x+99} \Rightarrow 2x^2+99x = 99x+9801 \Rightarrow 2x^2 = 9801 \Rightarrow x^2 =$$

$4900{,}5 \Rightarrow x \cong 70 \Rightarrow d = 2x + 99 =$ **<u>239 m</u>**.



Solution proposée par Isabelle Charrière :

Comme $v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v}$.

(1) Soit t_1, le temps nécessaire à la moto pour remonter le peloton.

$t_1 = \frac{99}{v_m - v_c}$ où v_m est la vitesse de la moto, v_c la vitesse du cycliste et $v_m - v_c$ la vitesse relative de la moto par rapport au cycliste.

(2) Soit t_2 le temps nécessaire à la moto pour redescendre le peloton.

$t_2 = \frac{99}{v_m + v_c}$ où $v_m + v_c$ est la vitesse relative de la moto par rapport au cycliste.

(3) $t = \frac{99}{v_c}$ où v_c est la vitesse du cycliste par rapport à un point fixe, au sol.

(4) $t = t_1 + t_2$.

De (1), (2), (3) et (4), on obtient $\frac{99}{v_m - v_c} + \frac{99}{v_m + v_c} = \frac{99}{v_c} = \frac{1}{v_m - v_c} + \frac{1}{v_m + v_c} = \frac{1}{v_c}$ (5).

Considérons la vitesse du cycliste comme unité de vitesse, soit $v_c = 1$. D'autre part, comme la vitesse de la moto est supérieure à celle du cycliste, on peut dire que $v_m = m \cdot v_c = m$ où m est un facteur supérieur à 1.

L'équation (5) devient $\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m+1} = 1 = \frac{(m+1)+(m-1)}{m^2-1} = \frac{2m}{m^2-1} \Rightarrow m^2 - 1 = 2m \Rightarrow m^2 - 2m - 1 = 0$.

$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$. La valeur positive de m est égale à $\frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2+2\cdot\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} = 2{,}414$.

Distance parcourue par la moto = $2{,}414 \cdot 99 = 238{,}986 = 239$ m.

14. Le concours

Cherchons le nombre de résultats différents pour un concours comptant successivement 1 seule question, puis 2, puis 3, etc.

1 question $\Rightarrow$ 2 résultats : 00 et 11

2 questions $\Rightarrow$ 4 résultats : 00, 11, 12, 23

3 questions $\Rightarrow$ 8 résultats : 00, 11, 12, 13, 23, 24, 25, 36

4 questions $\Rightarrow$ 15 résultats : 00, 11, 12, 13, 14, 23, 24, 25, 26, 27, 36, 37, 38, 39, 410

5 questions $\Rightarrow$ 26 résultats

6 questions $\Rightarrow$ 42 résultats

7 questions $\Rightarrow$ 64 résultats

Il serait fastidieux de continuer ainsi jusqu'à 100. Alors, il nous chercher l'éventuelle fonction liant le nombre de résultats au nombre de questions, par la méthode dite d'intégration (ou des différences). Cette méthode est expliquée en détail dans le livre « Les Clefs des Enigmes Mathématiques », d'Augustin Genoud, dans la solution de l'énigme A7, à la page 125). On la trouve également dans la rubrique E du site www.jeuxmath.ch.

Cette méthode nous permet d'affirmer que cette fonction existe bien et qu'elle est du type $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (4 inconnues : a, b, c et d). On a besoin de 4 équations pour trouver les valeurs des inconnues.

$f(1) = a + b + c + d = 2$

$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 4$

$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 8$

$f(4) = 64a + 16b + 4c + d = 15$

De la résolution de ce système d'équations, on peut tirer que a = 1/6, b = 0, c = 5/6 et d = 1.

D'où $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1$.

Alors, f (100) = **<u>166751</u>**.

Il est à noter que pour un concours comportant 100 questions, aucun résultat ne peut être interprété de plusieurs manières. Pour des raisons de clarté, considérons ici les résultats sous la forme a-b, où a représente la somme des points, et b, la somme des coefficients. Ainsi, 784 correspond à 7-84 (78-4 est impossible). Nous avons toujours obligatoirement b > a, à l'exception du cas 0-0.

Regardons l'étendue des résultats possibles de quelques cas :

Les résultats de ceux qui ont obtenu un seul point vont de 1-1 à 1-100. b va de 1 à 100.

Les résultats de ceux qui ont obtenu exactement 2 points vont de 2-3 à 2-199. b va de 3 à 199.

Les résultats de ceux qui ont obtenu exactement 3 points vont de 3-6 à 3-297. b va de 6 à 297.

Les résultats de ceux qui ont obtenu exactement 4 points vont de 4-10 à 4-394.

Les résultats de ceux qui ont obtenu exactement 10 points vont de 10-55 à 10-955.

Les résultats de ceux qui ont obtenu exactement 11 points vont de 11-66 à 11-1045.

Les résultats de ceux qui ont obtenu exactement 20 points vont de 20-210 à 20-1810.

Les résultats de ceux qui ont obtenu exactement 21 points vont de 21-231 à 21-1890.

Les résultats de ceux qui ont obtenu exactement 30 points vont de 30-465 à 30-2565.

Aucun résultat commençant par 1 (1 point, 10 points, 11 points, 12 points, …) ne peut conduire à une multiple interprétation au vu de l'étendue des résultats possibles.

Aucun résultat commençant par 2 (2 points, 20 points, 21 points, 22 points, …) ne peut conduire à une multiple interprétation au vu de l'étendue des résultats possibles.

Etc.

Remarque : dans un concours comportant 166 questions, le résultat 1166 pourrait être interprété comme 1-166 ou 11-66.