Voici, en vrac, quelques notes qui devraient intéresser ceux qui participent à des concours de jeux mathématiques et logiques

1. Somme des entiers naturels allant de 1 à n : $\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Nombre de diviseurs d'un nombre entier supérieur ou égal à 2

Soit le nombre A. Commençons par le décomposer en produit de facteurs premiers.

$A = a^m \cdot b^n \cdot c^p$ (a, b et c doivent être des nombres premiers différents).

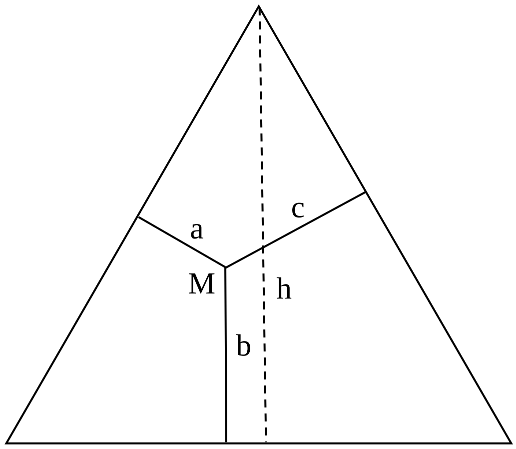
Le nombre de diviseurs est le produit (m+1) (n+1) (p+1).

Exemple : $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Alors 600 aura 24 diviseurs ($4 \cdot 2 \cdot 3$).

En effet, les diviseurs de 600 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200, 300 et 600.

3. Théorème de (Vincenzo) Viviani (1622 – 1703)

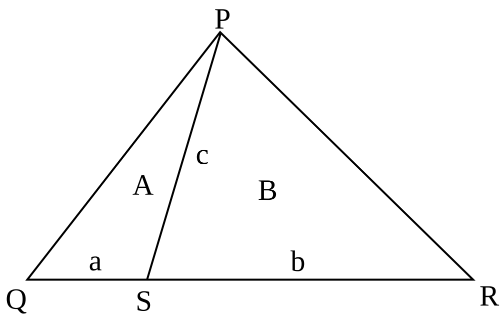
Dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point M aux côtés du triangle est toujours la même, quelle que soit le point M à l'intérieur du triangle. Cette somme est égale à la hauteur du triangle.



Le théorème de Viviani a pu être généralisé : dans un polygone régulier convexe à n côtés, la somme des distances d'un point M intérieur au polygone aux côtés du polygone est indépendante de la position du point M et elle est égale à n fois l'apothème (distance séparant le centre du polygone à un côté).

4. Histoire d'aires

Dans les deux croquis, A, B, C et D représentent l'aire du petit triangle dans lequel ils se trouvent.

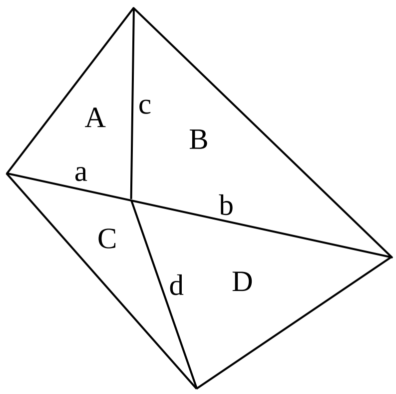


Le rapport des aires de deux triangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.

Autrement dit, lorsqu'un triangle PQR est partagé par un segment c issu d'un de ses sommets, on a la relation suivante : $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$.

(Voir preuve et applications au numéro 37 de la rubrique C)

Considérons la figure ci-contre dans laquelle les côtés a et b sont alignés, ce qui n'est pas le cas des côtés c et d.



Etant donné ce que l'on vient de voir, on a les propriétés suivantes :

$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \neq \frac{c}{d}$ (car c et d ne sont pas alignés)

5. Recherche d’une fonction polynomiale

D’une certaine fonction polynomiale f(x), on ne connaît l’image que de quelques points comme on peut le voir dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	…	– 7	100
f(x)	5	6	3	– 4	– 15	– 30	…	?	?

On aimerait connaître l’image de – 7 et de 100.

Il nous faut trouver la fonction polynomiale. Une des méthodes possibles pour la trouver est la méthode des différences.

Dans le tableau suivant, aux deux premières lignes, on met les points et leurs images.

A partir de la 3ème ligne, chaque terme est la différence entre les deux termes situés juste au-dessus de lui, dans la ligne précédente, dans le sens « droite moins gauche ». Ainsi, dans la ligne des premières différences, on obtient 1 (6 – 5), – 3 (3 – 6), – 7 (– 4 – 3), – 11 [– 15 – (– 4)], etc. On arrête le procédé lorsqu’une ligne est composée uniquement de nombres identiques. Appelons ce nombre M. Ici, M = – 4.

x	0		1		2		3		4		5
f(x)	5		6		3		– 4		– 15		– 30
1ères différences		1		– 3		– 7		– 11		– 15	
2èmes différences			– 4		– 4		– 4		– 4		

Si M est obtenu en 1 étape, la fonction est de la forme ax + b.

Si M est obtenu en 2 étapes, la fonction sera de la forme $ax^2 + bx + c$.

Si M est obtenu en 3 étapes, la fonction est de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Et ainsi de suite.

Dans notre cas, M a été obtenu en 2 étapes. Notre fonction est donc de la forme $ax^2 + bx + c$. Elle contient trois inconnues : a, b et c. Comme on sait que f(0) = 5, f(1) = 6 et f(2) = 3, on peut obtenir 3 équations à 3 inconnues :

f(0) = c = 5

f(1) = a + b + c = 6

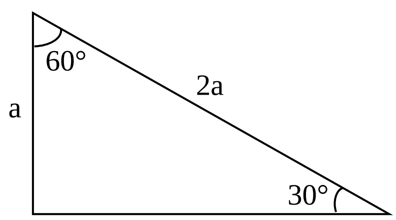
f(2) = 4a + 2b + c = 3.

La résolution de ce système d’équations nous donne a = – 2, b = 3 et c = 5.

D’où $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$. Alors, f(–7) = – 114 et f(100) = – 19'695.

Note : Pour aller un peu plus loin, voir le n° 36 à la rubrique C.

6. Triangle rectangle ayant un angle de 30 degrés



Dans un tel rectangle, il est intéressant de se rappeler que la longueur de l’hypoténuse est le double de la longueur du plus petit des côtés (celui opposé à 30 degrés).

7. Transvasements

Les trois seaux de Joël ne sont pas gradués. L'un est rempli à ras bord et il contient 8 litres d'eau. Les deux autres peuvent contenir au maximum, l'un 5 litres et l'autre 3 litres.

Combien de transvasements, au minimum, devra-t-il faire pour obtenir 4 litres dans un des seaux et 4 litres dans un autre ? (On considère qu'il y a transvasement chaque fois que l'on verse de l'eau d'un récipient dans un autre)

Ce problème est un grand classique des énigmes mathématiques. On essaie généralement de le résoudre à l'aide d'un tableau à trois entrées, comme ci-dessous, et on vérifie par divers essais que la solution est 7 transvasements.

Seau de 8 litres	8	3	3	6	6	1	1	4
Seau de 5 litres	0	5	2	2	0	5	4	4
Seau de 3 litres	0	0	3	0	2	2	3	0
Nombre de transvasements		1	2	3	4	5	6	7

Voici une méthode ingénieuse permettant de résoudre bon nombre d'énigmes du même type (au maximum 3 seaux), illustrée avec l'énigme précédente. Dans ce qui suit, nous considérons que la capacité du seau plein est au moins égale à la somme des capacités des deux seaux vides.

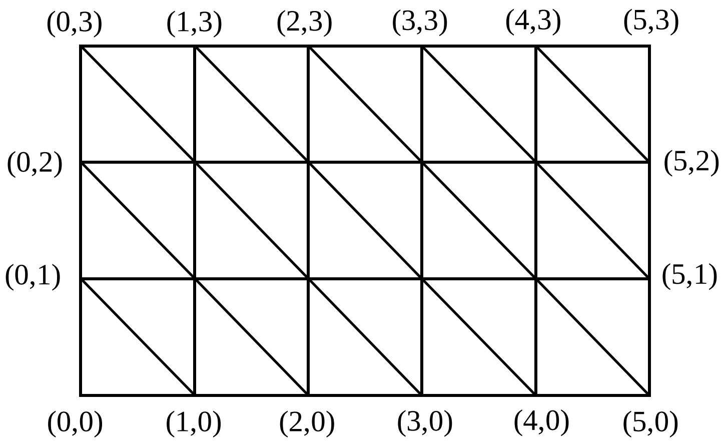
Occupons-nous des deux seaux qui sont vides au départ. Les quantités de liquide contenues dans ces seaux seront considérées comme des couples (x,y) où x représente la quantité d'eau contenue dans le seau qui a la plus grande capacité, et y, la quantité d'eau de l'autre seau. A l'aide d'un tableau (voir ci-dessous), on va chercher à déterminer tous les couples atteignables à la suite de divers transvasements. Pour cela, il faut commencer par construire le cadre du tableau, c'est-à-dire le rectangle dont les sommets sont (0,0), (5,0), (5,3) et (0,3). Ensuite, il faut placer sur ce cadre tous les autres couples.

Les traits du tableau sont ensuite tracés ainsi :

En partant de (0,0), on tire un trait horizontal jusqu'à (5,0). On trace la diagonale qui va de (5,0) à (2,3). On trace le trait vertical qui va de (2,3) à (2,0). On trace la diagonale qui va de (2,0) à (0,2). On trace le trait horizontal qui va de (0,2) à (5,2) et on continue ainsi en respectant les règles suivantes :

- Les traits doivent traverser tout le tableau.
- Chaque trait vertical ou horizontal doit être suivi d'une diagonale, et chaque diagonale doit être suivie d'un trait vertical ou horizontal.
- Toutes les diagonales sont à 45 degrés et « penchées » de la même suivantes

Voici le tracé complet : (0,0) → (5,0) → (2,3) → (2,0) → (0,2) → (5,2) → (4,3) → (4,0) → (1,3) → (1,0) → (0,1) → (5,1) → (3,3) → (3,0) → (0,3) → (5,3). Ce tracé nous a permis de construire le tableau ci-dessous.



On peut maintenant affirmer ceci :

1. Les couples atteignables sont uniquement ceux qui sont aux extrémités des diagonales, ainsi que les couples représentant les deux seaux vides (0,0) et les deux seaux pleins (5,3). Ils appartiennent donc forcément au cadre du tableau. Dans notre exemple, les 16 couples inscrits peuvent donc être atteints, ce qui ne sera pas toujours le cas. En fait, tous les couples du cadre des tableaux sont atteignables si et seulement si les nombres représentant x et y sont premiers entre eux.
2. Depuis chaque couple (a,b), il y a un certain nombre de traits qui y partent. Seuls les couples aux extrémités de ces traits sont atteignables depuis (a,b) par un transvasement.

   Exemples :

   Depuis (0,0), on ne peut aller qu'à (0,3) ou à (5,0).

   Depuis (0,3), on ne peut aller qu'à (0,0) ou à (5,3) ou à (3,0).

   Depuis (2,3), on ne peut aller qu'à (4,3) ou à (5,3) ou à (2,0) ou à (5,0).

Nous constatons qu'un déplacement horizontal ou vertical correspond à vider ou à remplir un des deux seaux, et qu'un déplacement en diagonale correspond à transférer de l'eau d'un seau à un autre.

Maintenant que nous savons nous déplacer sur le tableau, pour répondre au problème initial, il faut chercher le nombre minimal de transvasements. Comme nous voulons 4 litres dans deux seaux, il faudra obtenir 4 litres dans le seau de 5 litres et 4 litres dans le seau de 8 litres. Autrement dit, il nous faut obtenir le couple (4,0). Le nombre minimum de transvasements (7) peut être obtenu de deux manières :

- (0,0) (5,0) (2,3) (2,0) (0,2) (5,2) (4,3) (4,0).
- (0,0) (3,0) (3,3) (5,1) (0,1) (1,0) (1,3) (4,0).

Quelques exercices sur les transvasements se trouvent au numéro 63 de la rubrique C.

8. Résolution d'une équation diophantienne

La mise en équation de certaines énigmes fait parfois apparaître une équation à deux inconnues dont les coefficients et les solutions sont représentés par des nombres entiers. Une équation de ce type est appelée diophantienne.

Occupons-nous ici des équations diophantiennes du premier degré à deux variables. Il existe de multiples méthodes pour les résoudre. Je vous propose d'en voir deux, à l'aide d'un exemple. La première est plus simple que la seconde, mais elle nécessite quelques essais par tâtonnements.

<u>Première méthode</u>

Cherchons les couples (x ; y) qui satisfont l'équation diophantienne suivante 495x + 95y = 10'000.

Simplifions au maximum cette équation : 495x + 95y = 10'000 ⇔ 99x + 19y = 2000.

Isolons une des deux inconnues de sorte que le dénominateur soit le plus petit possible (ce sera plus facile ensuite). Ici, de 99x + 19y = 2000, on tire $y = \frac{2000-99x}{19} = \frac{2000}{19} - \frac{99x}{19} = 105 + \frac{5}{19} - 5x - \frac{4x}{19}$ $= 105 - 5x + \frac{5-4x}{19}$.

Comme $\frac{5-4x}{19}$ doit être un nombre entier, alors $5 - 4x$ doit être un multiple de 19, ce qui sera forcément le cas pour une et une seule valeur de x comprise entre 1 et 19. Quelques essais nous montrent que cette valeur de x est 6. En effet, $\frac{5-4\cdot 6}{19} = -1$.

Alors, $y = \dfrac{2000 - 99 \cdot 6}{19} = 74$. Nous avons un premier couple de solution : (6 ; 74).

L'expression fractionnaire $\dfrac{5 - 4x}{19}$ représentera un nombre entier pour tout x = 6 + 19a, avec a ∈ Z.

Il y a donc une infinité de solutions dont quelques-unes apparaissent dans le tableau suivant :

a	0	1	5	– 10	…
x	6	25	101	– 184	…
y	74	– 25	– 421	1064	…

La seule valeur de x comprise entre 1 et 19 aurait pu être trouvée à partir de l'expression $\dfrac{2000 - 99x}{19}$, mais la recherche par essais successifs aurait été un peu plus fastidieuse.

<u>Seconde méthode</u>

Cherchons les couples (x ; y) qui satisfont l'équation diophantienne suivante – 15x + 9y = 39.

On simplifie au maximum cette équation, puis on isole l'inconnue qui a le plus petit coefficient en valeur absolue (pour des raisons pratiques, mais ce n'est pas obligatoire), et on extrait les parties entières du numérateur.

$- 15x + 9y = 39 \Leftrightarrow - 5x + 3y = 13 \Rightarrow y = \dfrac{13 + 5x}{3} = 4 + x + \dfrac{1 + 2x}{3}$ (1).

Appelons a la partie fractionnaire de (1). On isole x, et on extrait les parties entières du numérateur.

$a = \dfrac{1 + 2x}{3} \Rightarrow 3a = 1 + 2x \Rightarrow x = \dfrac{3a - 1}{2} = a + \dfrac{a - 1}{2}$ (2).

Appelons b la partie fractionnaire de (2). On isole a.

$b = \dfrac{a - 1}{2} \Rightarrow a = 2b + 1$ (3).

S'il y avait encore un dénominateur dans (3), on continuerait comme auparavant, avec une nouvelle inconnue c, etc.

On détermine x et y, en fonction de la dernière inconnue apparue (b).

De (2) et (3), on obtient $x = 2b + 1 + \dfrac{2b + 1 - 1}{2} = 3b + 1$ (4).

De (1) et (4), on obtient $y = 4 + 3b + 1 + \dfrac{1 + 6b + 2}{3} = 5 + 3b + 2b + 1 = 5b + 6$.

Une infinité de solutions apparaissent de x = 3b + 1, et y = 5b + 6, avec b, x et y qui doivent être des nombres entiers. En voici quelques-unes dans le tableau suivant :

b	0	1	3	– 4	…
x	1	4	10	– 11	…
y	6	11	21	– 14	…