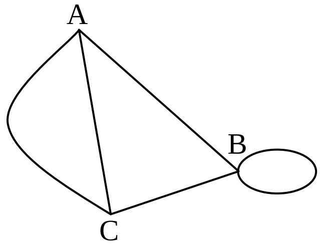
Petite introduction à la théorie des graphes

La théorie mathématique des graphes est vaste et complexe. Nous allons y faire une petite excursion, de manière très simplifiée. Cela nous permettra de résoudre des énigmes assez difficiles (voir exercices 98 et 99 de mon site, rubrique C). Dans ce petit aperçu, nous ferons souvent référence à des rencontres entre personnes.

Un graphe est défini par des sommets et par des traits quelconques reliant les sommets.

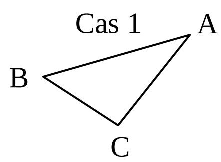
Les graphes qui nous intéressent sont toujours très simples : deux sommets ne peuvent être reliés que par une seule arête et il ne peut pas y avoir de boucle sur un sommet. On ne trouvera donc pas un graphe ayant la forme suivante.



Par souci de simplification, nous utiliserons par la suite toujours des segments pour relier les sommets. Nous pourrons ainsi parler de triangles, quadrilatères, hexagones, etc.

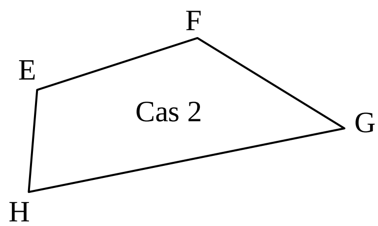
Découvrons quelques exemples et définitions :

1. A a rencontré B et C. B a croisé A et C. C a discuté avec A et B.
   Cette situation peut être représentée par le graphe ci-contre où deux personnes ne sont reliées entre elles que si et seulement si elles se sont rencontrées.

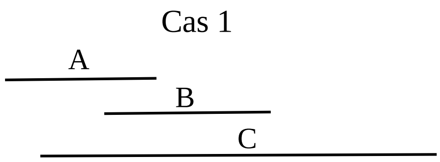


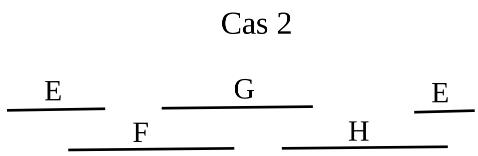
2. E a croisé F et H. F a rencontré E et G. G a vu F et H. H a bavardé avec E et G.

   Cette situation peut être représentée par le graphe ci-contre.



3. Une chaîne dans un graphe est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des segments. Une chaîne commence et se termine par un sommet. Une chaîne fermée est appelée cycle. Pour le graphe ci-dessus, on peut parler de la chaîne EFG et du cycle EFGH. L'arête reliant deux sommets non consécutifs d'un polygone est appelée corde.
4. Un schéma temporel est une manière de représenter les rencontres dans le temps. Voici comment pourraient être représentées les rencontres des cas 1 et 2 vus précédemment.





Supposons que les rencontres aient eu lieu dans un endroit précis. Alors :

Dans le premier cas, il est possible de faire une représentation où le schéma temporel de chaque personne est une segment unique. Si pour chaque personne, le segment est unique, cela signifie que chaque personne n'a passé qu'une seule fois dans la salle, en y restant un certain temps.

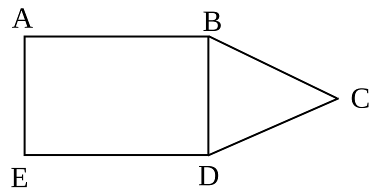
Dans le second cas, il est impossible que chaque individu n'ait passé dans la salle qu'une seule fois.

Graphes d’intervalles

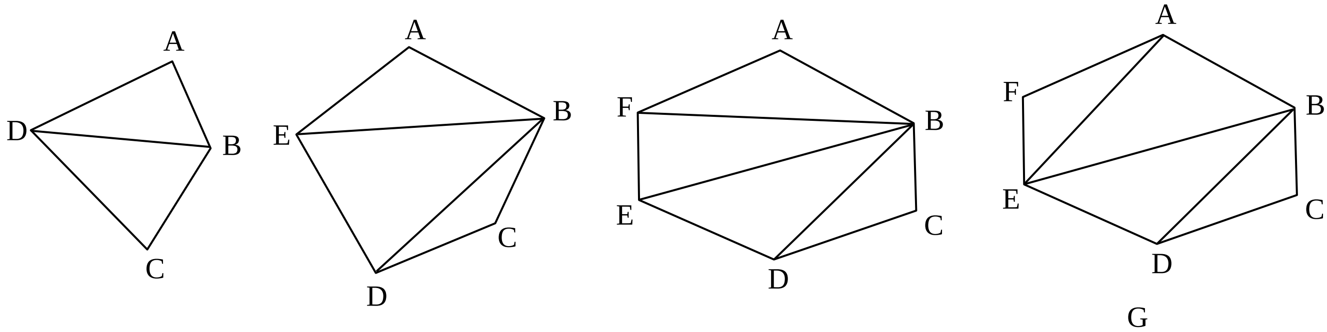
Lorsque la représentation d’un graphe sous forme d’un schéma temporel peut être composée d’un segment unique pour chaque individu, alors le graphe est appelé graphe d’intervalles. Le graphe du premier cas vu à la page précédente est un graphe d’intervalles, tandis que le second ne l’est pas (au moins une des personnes est venue, au minimum, deux fois dans la salle).

Pour résoudre certaines énigmes, il est essentiel de savoir si un graphe est d’intervalles ou s’il ne l’est pas. Cette distinction n’est pas simple à faire. Voici quelques pistes :

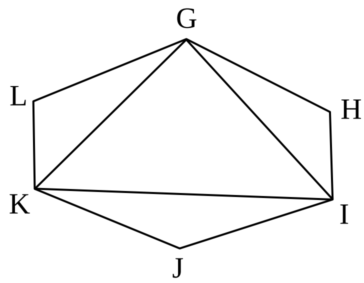
- Lorsqu’un graphe contient un cycle qui n’est pas d’intervalles, alors il n’est pas d’intervalles.
- Lorsqu’un graphe est représenté par triangle, il s’agit forcément d’un graphe d’intervalles. Lorsqu’un graphe est représenté par un polygone autre qu’un triangle et que ce polygone ne contient aucune corde, alors le graphe n’est pas d’intervalles. Le graphe ci-contre n’est pas d’intervalles car il contient le cycle ABDE qui est un quadrilatère sans corde.



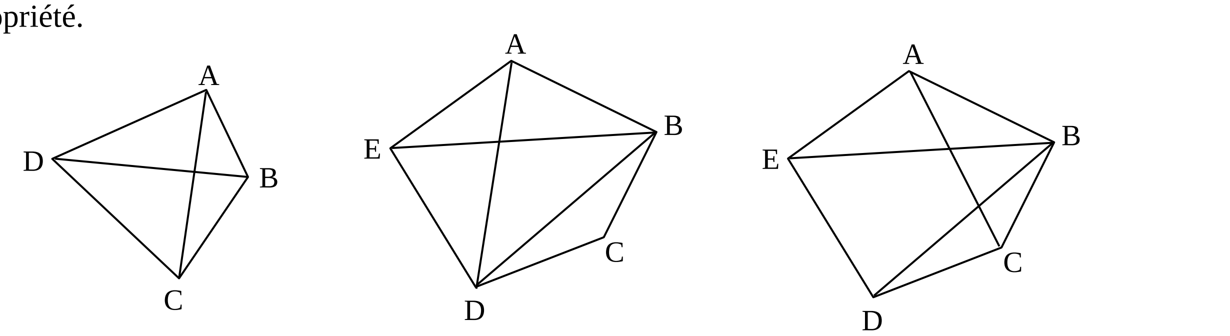
- Lorsqu’un graphe ayant la forme d’un polygone est entièrement et uniquement divisé en triangles ayant chacun au moins un côté confondu avec un côté du graphe, alors ce graphe est un graphe d’intervalles. Voici quatre exemples de graphes d’intervalles :



Le graphe GHIJKL est hexagonal. Il n’est pas d’intervalles car le triangle (ou cycle) GIK n’a pas un seul côté confondu avec un des côtés de l’hexagone. Ce cas est tellement important que nous l’appellerons <u>hexagone PI</u> (hexagone pas d’intervalles).



Le fait d’ajouter une corde à un graphe d’intervalles peut modifier sa propriété.

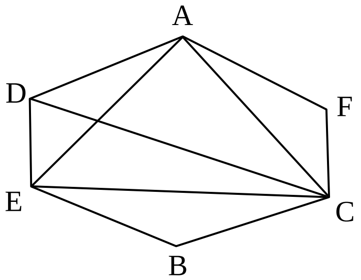
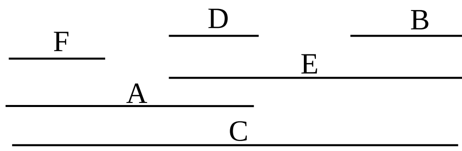
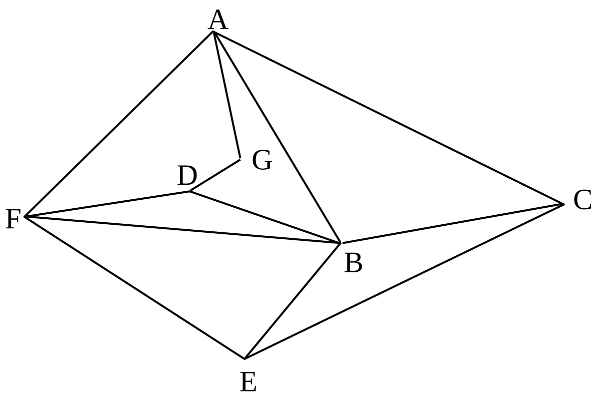
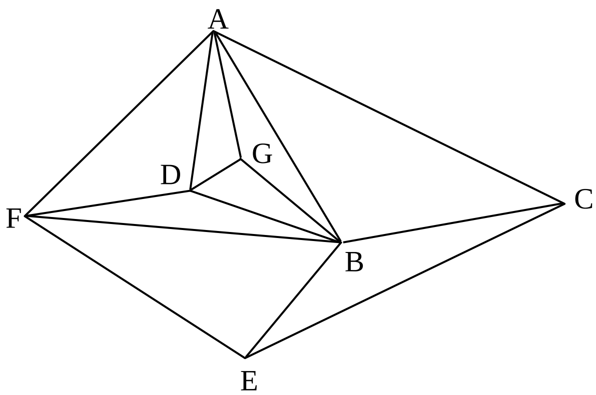
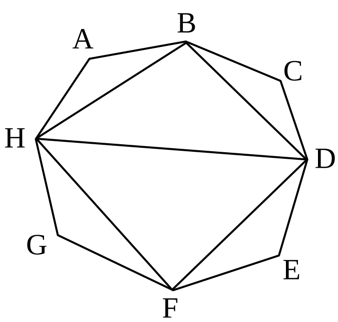


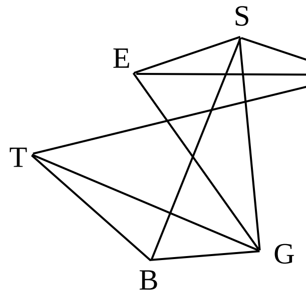
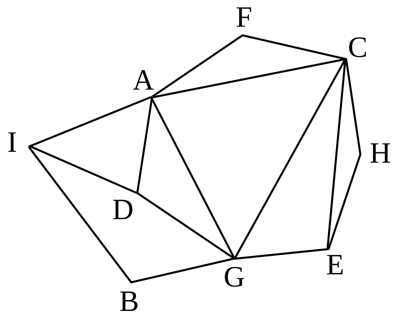
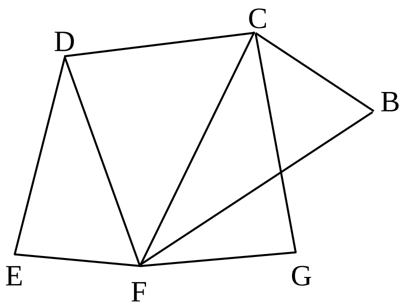
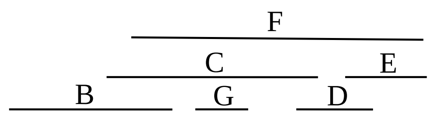
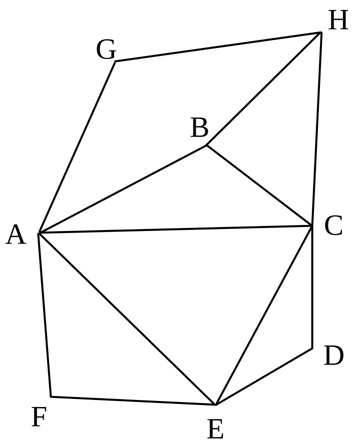
Le graphe de gauche, après ajout de la corde AC, est encore d’intervalles. Celui du milieu aussi (après ajout de la corde AD) car tous les cycles (trois quadrilatères et un pentagone) sont d’intervalles. Après ajout de la corde AC, le graphe de droite n’est plus d’intervalles car le cycle ACDE n’a pas de corde.

Dans la majorité des cas, on reconnaîtra un graphe qui n’est pas d’intervalles dès que l’on pourra y repérer un quadrilatère sans corde et/ou un hexagone PI.

Voyons quelques exemples supplémentaires. Pour tous les graphes qui ne sont pas d'intervalles, nous n'avons pas forcément donné tous les cycles qui ne le sont pas.

Lorsqu'un schéma temporel est donné, il s'agit d'un exemple possible.

	C'est un graphe d'intervalles. Tous les cycles (quadrilatères, pentagones et hexagone) sont d'intervalles. Le graphe hexagonal AFCBED est d'intervalles (les triangles AFC, ACD, DCE et CBE ont tous un côté confondu avec l'hexagone). 
	Ce n'est pas un graphe d'intervalles. Les cycles AFDG et AGDB ne sont pas d'intervalles. Le cycle ACBDG n'est pas d'intervalles non plus, mais il contient déjà le cycle AGDB qui n'est pas d'intervalles.
	Ce n'est pas un graphe d'intervalles. L'arête GB a été ajoutée au graphe précédent. Le cycle AFEC n'est pas d'intervalles.
	Ce n'est pas un graphe d'intervalles. Le cycle HBDEFG est un hexagone PI.

	Ce n’est pas un graphe d’intervalles. Les cycles TGEL, SGTL et SBTL ne sont pas d’intervalles.
	Ce n’est pas un graphe d’intervalles. Les cycles DGBI et AGBI ne sont pas d’intervalles. Le cycle FCEGDA est un hexagone PI.
	C’est un graphe d’intervalles. Tous les cycles sont d’intervalles. 
	Ce n’est pas un graphe d’intervalles. Les cycles ABHG et AGHC ne sont pas d’intervalles. Le cycle ABCDEF est un hexagone PI.