

98. L'inspectrice ! ** * ******

Des documents ultra secrets se trouvent dans une pièce X du service de renseignement d'un certain pays. Pour des raisons de sécurité, seules quelques personnes (notées A, B, C...) ont le droit de pénétrer dans cette pièce et aucune ne peut y aller plus d'une fois par jour. De plus, chaque personne pénétrant dans cette pièce est tenue de noter les personnes qu'elle y a rencontrées.

Un secrétaire est chargé de relever les rencontres ayant eu lieu dans la pièce X. Ainsi, si A dit avoir rencontré B, C et D, le secrétaire notera $A \rightarrow B + C + D$.

La responsable de la sécurité, la redoutée inspectrice Z, soupçonne depuis quelques temps que certaines personnes pénètrent plus d'une fois par jour dans la pièce X. En s'appuyant sur les relevés établis par le secrétaire durant le mois d'avril, a-t-elle de bonnes raisons d'avoir de tels soupçons ?

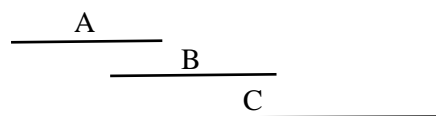
- a) 3 avril : $A \rightarrow B + C ; B \rightarrow A + C ; C \rightarrow A + B$.
- b) 10 avril : $D \rightarrow E + G ; E \rightarrow D + F ; F \rightarrow E + G ; G \rightarrow D + F$.
- c) 18 avril : $H \rightarrow I + L ; I \rightarrow H + J + K + L ; J \rightarrow I + K ; K \rightarrow I + J + L ; L \rightarrow H + I + K$.

L'inspectrice a pu établir, avant d'avoir consulté les relevés du secrétaire, qu'une seule personne avait pénétré plus d'une fois dans la pièce X le 24 avril. Grâce aux informations données ci-dessous, elle a pu démasquer la personne fautive. Qui était-ce ? Combien de fois est-elle entrée dans la salle X, au minimum ?

- d) 24 avril : $M \rightarrow P + N ; N \rightarrow M + O ; O \rightarrow P + N + T + Q ; P \rightarrow M + O ; Q \rightarrow O + R ; R \rightarrow Q + S ; S \rightarrow R + T ; T \rightarrow O + S$.

Solutions

- a) L'inspectrice Z représente les rencontres dans le temps à l'aide d'un schéma dit temporel, comme dessiné ci-contre. Elle arrive à faire en sorte que le temps de chacun passé dans la pièce X soit représenté par un segment unique.



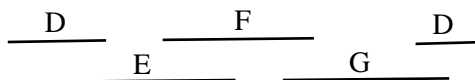
Par exemple, A pourrait être resté dans la pièce de 8 h à 9 h, B de 8 h 40 à 9 h 30 et C de 8 h 10 à 10 h.

L'inspectrice n'a pas de bonnes raisons d'avoir des soupçons sur les personnes ayant été dans la pièce X le 3 avril.

- b) L'inspectrice vérifie à nouveau les rencontres notées par le secrétaire, en faisant cette fois-ci le tableau ci-contre. Elle ne décèle aucune anomalie de ce côté-là.

	D	E	F	G
D		x		x
E	x		x	
F		x		x
G	x		x	

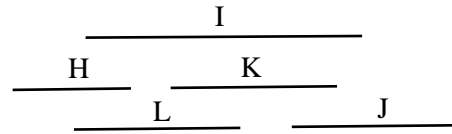
Comme dans le cas a), elle dessine des schémas temporels de la situation et constate qu'il est impossible de représenter le temps passé par chacun dans la pièce X par un segment unique. **L'inspectrice est donc certaine qu'au moins une personne est passée plus d'une fois dans la pièce X.**



Le schéma temporel de la situation pourrait être celui dessiné ci-contre où D est passé deux fois dans la pièce X. Mais rien ne prouve que ce soit D qui est passé plusieurs fois dans la pièce et qu'il n'y en ait pas d'autres qui aient fait de même.

- c) L'inspectrice construit le tableau des rencontres et ne décèle aucune anomalie. Comme elle arrive à dessiner un schéma temporel dans lequel les temps de chacun passés dans la pièce X peuvent être représentés par un segment unique, **elle n'a aucune bonne raison d'avoir des soupçons.**

	H	I	J	K	L
H		x			x
I	x		x	x	x
J		x		x	
K		x	x		x
L	x	x		x	

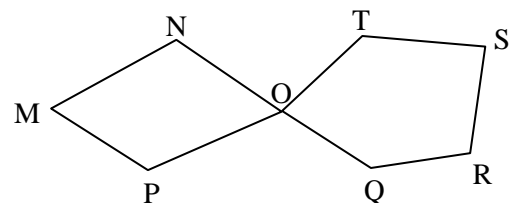


- d) L'inspectrice construit le tableau des rencontres et ne décèle aucune anomalie. Pourtant, elle sait qu'une des personnes est entrée plusieurs fois dans la pièce. Une stratégie consiste à supposer que la personne recherchée est M. Si le schéma temporel des sept autres personnes peut être constitué d'un segment unique pour chacune des personnes, cela signifie que la personne recherchée est M. Si ce n'est pas le cas, il faut alors supposer que le coupable est N, et passer ainsi en revue toutes les personnes. Ce procédé est chronophage, mais peut conduire à la solution.

	M	N	O	P	Q	R	S	T
M		x		x				
N	x		x					
O		x		x	x			x
P	x		x					
Q			x			x		
R					x		x	
S						x		x
T			x				x	

Ici, la méthode des graphes est fort utile. Rappelons qu'un graphe est un ensemble de sommets reliés par des traits quelconques que nous représenterons ici par des segments. Les sommets représentent les personnes qui sont entrées dans la pièce X et deux sommets (A et B, par exemple) sont reliés si et seulement si A et B se sont rencontrés.

Les relevés du 24 avril peuvent être représentés par le graphe ci-contre. Dans la mesure du possible, on évite que les segments reliant deux sommets ne se croisent.

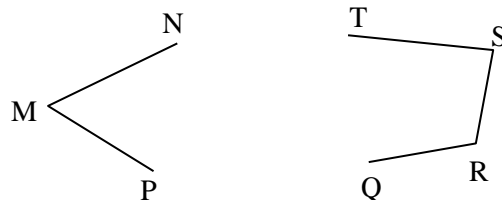


Dans la théorie des graphes, lorsque la représentation dans un schéma temporel peut être composée d'un segment unique pour chaque individu, alors le graphe associé est appelé graphe d'intervalles.

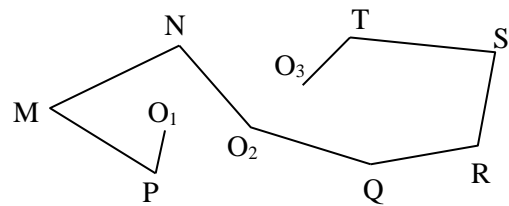
Dans le graphe dessiné ci-dessus, il y a deux cycles (chaîne fermée dans un graphe) qui ne sont pas d'intervalles : MNOP et QRSTO. Il est relativement aisé de le constater en dessinant les schémas temporels de chacun des deux cycles. Le schéma temporel du cycle MNOP ne peut pas être constitué de 4 segments et le schéma temporel du cycle QRSTO ne peut pas être constitué de 5 segments.

Seule la personne O fait partie des deux cycles. **O est donc la personne qui est passée plus d'une fois dans la salle X.**

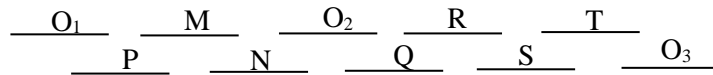
Si on exclut O, le graphe de la situation est celui-ci :



Il nous faut ajouter O un minimum de fois sur ce graphe pour qu'il soit d'intervalles. Voici un schéma possible dans lequel O apparaît trois fois.



Le schéma temporel de ce graphe est donné ci-dessous.



O est passée au minimum **trois fois** dans la salle X.

Avant de passer à l'exercice 99, il est fortement conseillé de lire attentivement la petite introduction à la théorie des graphes présentée au bas de la rubrique E de mon site.