89. Les divisions infernales ! * ** ***

Dans cet exercice, tous les nombres sont des entiers positifs. Toutes les solutions peuvent être trouvées sans l'aide d'un ordinateur.

a) a7 est un nombre de deux chiffres divisible par 3. Quels sont les nombres représentant a7 ?
b) 87a2 est un nombre de quatre chiffres divisible par 8. Quels sont les nombres représentant 87a2 ?
c) 835ab est un nombre de cinq chiffres divisible par 18. Quelle est le plus grand nombre représentant 835ab ?
d) 2ab2 est un nombre de quatre chiffres divisible par 59. Quels sont les nombres représentant 2ab2 ?
e) ab57 est un nombre de quatre chiffres divisible par 23. Quels sont les nombres représentant ab57 ?
f) abc205 est un nombre de six chiffres divisible par 139. Quels sont les nombres représentant abc205 ?
g) abcde37 est un nombre de sept chiffres divisible par 13. Quel est le plus petit nombre représentant abcde37 ?

Solutions

a) Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Solutions : **<u>27</u>**, **<u>57</u>** et **<u>87</u>**.

b) Un nombre est divisible par 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.
Solutions : **<u>8712</u>**, **<u>8752</u>** et **<u>8792</u>**.

c) Un nombre est divisible par 18 s'il est divisible par 2 et par 9 car $18 = 2 \cdot 9$ et que 2 et 9 sont premiers entre eux (le plus grand diviseur commun de 2 et 9 est 1). Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Solution : **<u>83'592</u>** (83'592 est un nombre pair dont la somme des chiffres est 27).

d) Si 2ab2 est un multiple de 59, alors il existe un nombre entier x tel que $59 \cdot x = 2ab2$. Dans ce cas, x est forcément un nombre se terminant par 8, car il n'y a qu'un nombre se terminant par 8 qui, multiplié par un nombre se terminant par 9, donne un produit qui se termine par 2. Comme $2000 : 59 \cong 33$, essayons $59 \cdot 38 = 2242$; puis $59 \cdot 48 = 2832$; puis $59 \cdot 58 = 3422$.
Solutions : **<u>2242</u>** et **<u>2832</u>**.

e) Il existe de nombreuses méthodes permettant de trouver les solutions de cet exercice. En voici trois.
<u>Première méthode</u> :
ab57 est un multiple de 23. Cherchons une solution en additionnant des multiples de 23. Il nous faut un multiple de 23 finissant par 7. Le plus petit est 207 ($23 \cdot 9$). Il nous faut un autre multiple de 23 dont l'avant-dernier chiffre est 5. Le plus petit est 1150 ($23 \cdot 50$). Nous pouvons alors trouver une solution en additionnant 207 et 1150, ce qui donne 1357. Comme le plus petit multiple de 23 se terminant par 0 est 230, alors tous les multiples de 23 se terminant par un ou plusieurs zéros sont uniquement des nombres commençant par 23. Dans ce cas, les autres solutions sont 3657 (1357 + 2300), 5957 (3657 + 2300) et 8257 (5957 + 2300).
Solutions : **<u>1357</u>**, **<u>3657</u>**, **<u>5957</u>** et **<u>8257</u>**.

Deuxième méthode :

La deuxième méthode est moins intuitive que la première mais elle peut être pratique dans certains cas. Elle consiste à remplacer ab57 par une autre expression, elle aussi multiple de 23, constituée uniquement de parties littérales et de zéros.

Préparons d'abord quelques multiples de 23 :

$1 \cdot 23 = 23$.	$3 \cdot 23 = 69$.	$5 \cdot 23 = 115$.	$7 \cdot 23 = 161$.	$9 \cdot 23 = 207$.
$2 \cdot 23 = 46$.	$4 \cdot 23 = 92$.	$6 \cdot 23 = 138$.	$8 \cdot 23 = 184$.	$10 \cdot 23 = 230$.

Les dix multiples de 23 ci-dessus sont intéressants pour la suite, car tous les chiffres sont représentés parmi les unités de ces multiples.

Pour que le 7 de ab57 soit remplacé par un zéro, on effectue ab57 + 23 = ab80. On aurait pu faire ab57 − 207 = a(b−2)50, avec b−2 comme 2ème chiffre du résultat de la soustraction.

Ajoutons 920 à ab80, ce qui donne a(b+10)00. Cette expression doit être un multiple de 23.

a(b+10)00 = 2300 $\Rightarrow$ a(b+10) = 23 $\Rightarrow$ a = 2 et b = - 7 $\Rightarrow$ a = 1 et b = 3. Nombre cherché : 1357.

a(b+10)00 = 4600 $\Rightarrow$ a(b+10) = 46 $\Rightarrow$ a = 4 et b = - 4 $\Rightarrow$ a = 3 et b = 6. Nombre cherché 3657.

Etc.

Troisième méthode :

Appelons x, le nombre à deux chiffres « ab » de l'expression ab57. On obtient alors l'équation diophantienne suivante :

100x + 57 = 23y. Cette méthode est très pratique pour ceux qui savent résoudre une équation diophantienne. Consultez à ce sujet les notes de la rubrique E de mon site www.jeuxmath.ch.

f) Appliquons la première méthode de l'exercice e)

abc205 est un multiple de 139. Le plus petit multiple de 139 se terminant par 5 est 695 ($139 \cdot 5$). A 695, il nous faut ajouter un multiple de 23 de manière à ce que la somme finisse par 05. Ce multiple (le plus petit possible) est 12'510 ($139 \cdot 90$). 695 + 12'510 = 13'205 (ce nombre a la même terminaison que abc205). Comme le plus petit multiple de 139 se terminant par 0 est 1390, alors tous les multiples de 139 se terminant par un ou plusieurs zéros sont uniquement des nombres commençant par 139. D'où une première solution en additionnant 13'205 et 139'000, ce qui donne 152'205. Une autre solution est 291'205 (152'205 + 139'000). Etc.

Solutions : **152'205**, **291'205**, **430'205**, **569'205**, **708'205**, **847'205** et **986'205**.

Recherchons les solutions avec la deuxième méthode de e)

Préparons quelques multiples de 139 :

$1 \cdot 139 = 139$.	$3 \cdot 139 = 417$.	$5 \cdot 139 = 695$.	$7 \cdot 139 = 973$.	$9 \cdot 139 = 1251$.
$2 \cdot 139 = 278$.	$4 \cdot 139 = 556$.	$6 \cdot 139 = 834$.	$8 \cdot 139 = 112$.	$10 \cdot 139 = 1390$.

abc205 + 695 = ab(c+1)900. ab(c+1)900 + 1251 = (a+2)(b+2)(c+6)000. Recherchons les valeurs de a, b et c.

(a+2)(b+2)(c+6)000 = 139 $\Rightarrow$ a = 0, b = 1, et c = 3. 13'205 est un multiple de 139. Une première solution est 152'205 (13'205 + 139'000). Etc.

Ici encore, la résolution de cet exercice est possible en passant par une équation diophantienne.

Appelons x, le nombre à trois chiffres « abc ». Equation : 1000x + 205 = 139y.

g) Appliquons la première méthode de l'exercice e) en jonglant avec les multiples de 13. Le nombre cherché est le plus petit multiple de 13 supérieur à 1'000'000 et finissant par 37.

117 + 520 = 637. 637 + 130'000 $\cdot$ 8 = 1'040'637. 1'040'637 − 39'000 − 1300 = **1'000'337**.

Ici aussi, on pourrait appliquer la deuxième et la troisième méthode de l'exercice e).

– Augustin Genoud, août 2018 –