86. Les marches ! * ** ***

David est capable de monter les marches de l'escalier de sa maison une par une, deux par deux ou trois par trois. S'il souhaite s'arrêter à la première marche, il n'y a qu'une façon de le faire. S'il désire s'arrêter à la 2ème marche, il y a deux façons différentes de le faire : en montant les marches une par une ou en bondissant directement sur la 2ème marche.

De combien de façons différentes peut-il monter les marches pour aller du bas de l'escalier jusqu'à la

a) 3ème marche ?
b) 4ème marche ?
c) 5ème marche ?
d) 6ème marche ?
e) 7ème marche ?

Faites un tableau à deux entrées dans lequel vous noterez la correspondance entre le nombre de marches à monter et le nombre de façons différentes de les monter.

f) Observez dans votre tableau la suite des nombres indiquant les nombres de façons différentes de monter les marches. Cette suite peut être complétée indéfiniment par une méthode simple. Quelle est cette méthode ?

Solutions

a) David peut, en un saut, arriver directement sur la 3ème marche. Il peut aussi monter sur la première marche puis sauter jusque sur la 3ème marche. Il peut encore sauter jusque sur la 2ème marche puis monter sur la 3ème marche. Il peut aussi monter les marches une par une. Il y a **4** façons différentes d'atteindre la 3ème marche. Cela revient à chercher le nombre de possibilités différentes d'écrire un nombre formé uniquement des chiffres 1, 2 et 3, et dont la somme des chiffres est égale à 3. Ainsi, les nombres 3, 12, 21 et 111 représentent les quatre façons de monter les trois marches.

   3 = bond de trois marches.

   12 = montée d'une marche puis saut de deux marches.

   21 = saut de deux marches et montée d'une marche.

   111 = montée des marches une par une.

   Pour éviter le plus possible d'oublier des nombres, on va par la suite toujours les classer dans un ordre croissant.

b) Pour 4 marches, cela revient à chercher le nombre de possibilités différentes d'écrire un nombre formé uniquement des chiffres 1, 2 et 3, et dont la somme des chiffres est égale à 4. Il y a **7** possibilités : 13, 22, 31, 112, 121, 211 et 1111.

c) Pour 5 marches, cela revient à chercher le nombre de possibilités différentes d'écrire un nombre formé uniquement des chiffres 1, 2 et 3, et dont la somme des chiffres est égale à 5. Il y a **13** possibilités : 23, 32, 113, 122, 131, 212, 221, 311, 1112, 1121, 1211, 211 et 11111.

d) Pour 6 marches, cela revient à chercher le nombre de possibilités différentes d'écrire un nombre formé uniquement des chiffres 1, 2 et 3, et dont la somme des chiffres est égale à 6. Il y a **24** possibilités : 33, 123, 132, 213, 222, 231, 312, 321, 1113, 1122, 1131, 1212, 1221, 1311, 2112, 2121, 2211, 3111, 11112, 11121, 11211, 12111, 21111 et 111111.

e) Pour 7 marches, cela revient à chercher le nombre de possibilités différentes d'écrire un nombre formé uniquement des chiffres 1, 2 et 3, et dont la somme des chiffres est égale à 6. Il y a **44** possibilités : 133, 223, 232, 313, 322, 331, 1123, 1132, 1213, 1222, 1231, 1312, 1321, 2113, 2122, 2131, 2212, 2221, 2311, 3112, 3121, 3211, 11113, 11122, 11131, 11212, 11221, 11311, 12112, 12121, 12211, 13111, 21112, 21121, 21211, 22111, 31111, 111112, 111121, 111211, 112111, 121111, 211111 et 1111111.

f) Dans le tableau ci-dessous, A représente le nombre de marches, et B le nombre de façons différentes de les monter.

A	1	2	3	4	5	6	7
B	1	2	4	7	13	24	44

A la ligne B, chacun des nombres est, à partir du 4ème, la somme des trois nombres qui le précèdent. Cette suite est appelée suite de Tribonacci (en référence à Fibonacci, voir exercice 2 de cette même rubrique). Dès lors, il est facile de compléter cette suite aussi loin que voulu.

81 = 13 + 24 + 44.

149 = 24 + 44 + 149.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
B	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	…