

78. Le défi des sept prisonniers *** *****

Dans une prison, il y a sept prisonniers. Chacun d'eux est seul dans sa cellule, ne peut pas communiquer avec les autres, et n'a aucun moyen de savoir ce qui se passe en dehors de sa cellule.

Un jour, le directeur réunit les sept prisonniers, et leur dit ceci : « Je vous propose un défi qui commencera demain. Chaque jour, un gardien fera venir dans cette salle l'un de vous, choisi au hasard, ce qui signifie qu'un même prisonnier peut y venir plusieurs jours de suite. A l'intérieur de cette salle, il n'y a qu'une ampoule et un interrupteur, lequel permet d'allumer ou d'éteindre la lumière de cette ampoule. Votre seul droit sera d'appuyer sur l'interrupteur, si vous le souhaitez. Personne d'autre que vous ne touchera l'interrupteur. Vous gagnerez le défi lorsque l'un de vous affirmera avec justesse que vous êtes tous les sept passés au moins une fois dans cette salle. Au début du défi, la lumière sera éteinte. Dernière précision, si le défi est gagné, vous serez libérés, sinon vous serez fusillés. Vous avez maintenant une heure pour définir ensemble une stratégie. Ensuite, les gardiens vous reconduiront dans vos cellules. »

Quelle stratégie doivent adopter les prisonniers pour être libérés ?

Cette énigme me plaît beaucoup car la donnée est simple, sans piège, et aisément compréhensible par tous ceux dont les mathématiques ne sont plus qu'un lointain souvenir. Comment quantifier la difficulté de cette énigme ? La solution, si elle n'est pas difficile d'un point de vue mathématique, exige beaucoup d'imagination et de logique.

Essayez de la résoudre en y réfléchissant une quinzaine de minutes, à plusieurs occasions, si nécessaire, à quelques jours d'intervalles. Si elle vous échappe encore, alors, avant d'aller voir la solution, lisez l'indice ci-dessous.

Indice

L'un des prisonniers sera désigné chef par l'ensemble de ses camarades. Il aura un rôle particulier, et lui seul pourra affirmer que les sept prisonniers sont passés au moins une fois dans la salle.

Solutions (Deux solutions vous sont proposées, assez semblables. Il en existe d'autres, plus compliquées)

L'un d'entre eux sera désigné chef par l'ensemble de ses camarades. Les six autres prisonniers devront simplement allumer la lumière la première fois qu'ils la trouveront éteinte. Dans tous les autres cas, ils ne feront rien.

Le chef devra éteindre la lumière chaque fois qu'il la trouvera allumée, et il devra compter le nombre de fois qu'il éteint la lumière. Lorsque le nombre de fois sera égal à six, il pourra annoncer que tous les prisonniers sont passés dans la salle. Lorsqu'il trouve la lumière éteinte, il ne fait rien.

Vérifions la solution par un exemple. Les prisonniers sont A, B, C, D, E, F, G. Le prisonnier C a été nommé chef.

Dans le tableau suivant, la première ligne désigne les jours, la 2ème les prisonniers, la 3ème l'état de la lampe (a pour allumée, et e pour éteinte). Dans la 4ème ligne, le chef compte le nombre de fois qu'il éteint la lumière. En gras sont notés les prisonniers qui allument la lumière. On rappelle qu'ils le font une seule fois, la première fois qu'ils trouvent la lumière éteinte.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
B	B	D	C	D	C	G	F	C	B	C	E	F	F	C	B	A	G	C	E	D	C	G	F	G	E	C
a	a	a	e	a	e	a	a	e	e	e	a	a	a	e	e	a	a	e	e	e	e	e	a	a	a	e
			1		2			3						4				5								6

Dans notre exemple, les prisonniers seront libérés après 27 jours. On notera que les sept prisonniers avaient déjà passé dans la salle au bout de 17 jours, mais aucun d'entre eux ne pouvait le savoir. Cette énigme peut être étendue à un nombre quelconque de prisonniers. Pour n prisonniers, le nombre de fois que le chef éteint la lumière devra être de $n - 1$.

* * *

Solution de mon ami Jérôme Gavin :

La première fois qu'un prisonnier entre dans la pièce et que la lumière est éteinte, il allume la lumière. Dans tous les autres cas, il ne fait rien, sauf si ce prisonnier est entré dans la pièce le 2ème jour.

Le prisonnier (appelé A) qui entre dans la pièce le 2ème jour éteint la lumière si elle est allumée. Ensuite, lorsqu'il reviendra dans la pièce, il éteindra la lumière chaque fois que celle-ci est allumée, et ne fera rien s'il trouve la lumière éteinte.

Si A est le prisonnier qui a allumé la lumière le premier jour, il saura que tout le monde est passé lorsqu'il éteindra la lumière pour la 7ème fois.

Si A n'est pas le prisonnier qui a allumé la lumière le premier jour, il saura que tout le monde est passé lorsqu'il éteindra la lumière pour la 6ème fois.