

76. La lampe magique ! * **

Guy appuie sur l'interrupteur de la lampe magique. Celle-ci s'allume pendant une minute, puis s'éteint pendant une demi-minute, puis s'allume pendant un quart de minute, puis s'éteint pendant un huitième de minute, puis s'allume pendant un seizième de minute, et ainsi de suite, indéfiniment, le temps de chaque étape étant la moitié de l'étape précédente.

- La lampe magique sera-t-elle allumée une minute et 58 secondes après l'appui sur l'interrupteur ?
- La lampe magique sera-t-elle allumée deux minutes après l'appui sur l'interrupteur ?

Solutions

Dans la colonne A du tableau ci-dessous, chaque nombre est la moitié de celui qui lui est juste au-dessus. Ces nombres sont donnés en secondes et centièmes de secondes. Exemple : 3,75 = 3 secondes et 75 centièmes de secondes. Dans la colonne B, on a le temps cumulé.

	A	B
Lampe allumée	60	60
Lampe éteinte	30	90
Lampe allumée	15	105
Lampe éteinte	7,5	112,5
Lampe allumée	3,75	116,25
Lampe éteinte	1,875	118,125
Lampe allumée	0,9375	119,0625
Lampe éteinte	0,46875	119,53125
...

La lampe est allumée de 0 à 60 secondes. Elle est éteinte de 60 à 90 secondes. Elle est allumée de 90 à 105 secondes. Elle est éteinte de 105 à 112,5 secondes. Elle est allumée de 112,5 à 116,25 secondes. Elle est éteinte de 116,25 à 118,125 secondes. Etc.

- Comme une minute et 58 secondes correspondent à 118 secondes, alors la lampe sera **éteinte** à ce moment-là.
- En continuant le tableau à l'infini, on s'apercevra que les deux minutes ne seront jamais atteintes. Et pourtant, les mathématiciens admettent que la somme suivante faite de termes infinis est égale à 2 : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$. Disons alors que nous nous trouvons devant un paradoxe et que chacun pourra répondre à cette question comme il le souhaite, car il n'y a pas aujourd'hui une réponse univoque de la part des mathématiciens. Le problème de la lampe a été présenté en 1954 par James Francis Thomson.