

74. Règle de Golomb * **

Une règle de Golomb (nom donné en l'honneur du mathématicien Solomon Wolf Golomb, né en 1932 à Baltimore aux Etats-Unis, lequel est à l'origine de cette règle) est une règle munie de marques à des positions toujours entières. Chaque couple de marques de cette règle doit mesurer une longueur différente de toute autre paire de marques. La première marque, sauf indication contraire, est 0.

La règle de Golomb dessinée ci-dessous permet de mesurer 6 longueurs différentes :

$$1 (1 - 0) ; 2 (3 - 1) ; 3 (3 - 0) ; 4 (7 - 3) ; 6 (7 - 1) ; 7 (7 - 0).$$



Au lieu de dessiner une règle de Golomb, on se contente souvent de ne noter que les marques de la règle. Ainsi, dans notre exemple, la règle est remplacée par (0, 1, 3, 7).

Par définition, on dit que :

- L'ordre d'une règle de Golomb est le nombre de marques qu'elle porte.
- La longueur d'une règle de Golomb est la plus grande distance entre deux de ses marques.
- Une règle de Golomb est parfaite si elle permet de mesurer toutes les distances entre 0 et la longueur de la règle. Il n'existe pas de règle parfaite de plus de 4 marques.
- La plus courte règle de Golomb pour un ordre donné s'appelle une règle de Golomb optimale.

Remarque : chaque règle de Golomb possède une règle symétrique. La règle (0, 1, 3, 7) est symétrique à la règle (0, 4, 6, 7). Habituellement, si on mentionne une règle de Golomb, on ne mentionne pas celle qui lui est symétrique.

- Prenons la règle donnée en exemple (0, 1, 3, 7). Quel est son ordre ? Quelle est sa longueur ? Est-elle parfaite (si ce n'est pas le cas, dessinez une règle parfaite à 4 marques) ? Est-elle optimale ?
- Cherchez trois règles à cinq marques dont la longueur ne dépasse pas 13.
- Cherchez deux règles à huit marques dont la longueur ne dépasse pas 44.

Solutions

- L'ordre est 4 car il y a quatre marques. La longueur est 7 (plus longue distance). La règle n'est pas parfaite car il n'y a pas la longueur 5. La règle n'est pas optimale. La règle optimale pour un ordre 4 est la règle suivante (qui est aussi parfaite), de longueur 6.



- Voici quelques règles à cinq marques dont la longueur ne dépasse pas 13 : (0, 1, 3, 8, 12), (0, 1, 3, 7, 12), (0, 1, 4, 6, 13), (0, 1, 4, 9, 11), (0, 2, 3, 7, 13), (0, 2, 5, 6, 13), (0, 3, 4, 9, 11). Les deux règles dont la longueur est 11 sont optimales.

c) Voici quelques règles à huit marques dont la longueur ne dépasse pas 44 : (0, 1, 3, 7, 12, 20, 30, 44), (0, 1, 4, 9, 15, 22, 32, 34), (0, 1, 3, 8, 14, 18, 30, 39), (0, 1, 5, 7, 15, 18, 27, 43), (0, 2, 5, 6, 15, 22, 33, 41), (0, 2, 6, 7, 15, 18, 32, 42). La règle dont la longueur est 34 est optimale.

Remarques

Construire une règle de Golomb n'est pas difficile, mais trouver toutes les règles de Golomb d'un ordre donné est un grand défi informatique.

Parmi les applications des règles de Golomb, citons la théorie du codage, la radioastronomie, la résolution de certains jeux mathématiques et la répartition des antennes de réseaux cellulaires.