

73. Les vitesses moyennes ! ** ***

Pour se rendre à son lieu de travail, Luc suit toujours le même chemin, que ce soit à l'aller ou au retour.

- Lundi, il s'est déplacé à pied. A l'aller, il a fait du 5 km/h, et au retour du 7,5 km/h. Quelle a été sa vitesse moyenne, en km/h, entre l'aller et le retour ?
- Mardi, il est allé au travail en vélo. Au retour, il a roulé à 30 km/h. Quelle a été sa vitesse à l'aller si sa vitesse moyenne entre l'aller et le retour a été de 24 km/heure ?
- Mercredi, il a voyagé en voiture. Pris dans un bouchon, il n'a pu faire l'aller qu'à 25 km/h. A quelle vitesse doit-il revenir chez lui pour que sa vitesse moyenne entre l'aller et le retour soit le double de sa vitesse à l'aller ?
- Lorsqu'une moitié d'un parcours est effectuée à la vitesse v_1 , et que la seconde moitié est réalisée à la vitesse v_2 , il existe une formule permettant de trouver la vitesse moyenne v_m entre l'aller et le retour. Déterminez v_m , en fonction de v_1 et de v_2 .

Solutions

Soit v = vitesse, t = temps, et d = distance.

De $v = \frac{d}{t}$, on obtient $d = v \cdot t$ et $t = \frac{d}{v}$.

- Nous ne connaissons pas la distance entre le domicile de Luc et son lieu de travail. Le plus simple, c'est de supposer que la distance est de 5 km.

Temps à l'aller = 60 minutes.

Vitesse au retour = $\frac{7,5 \text{ km}}{60'} = \frac{5 \text{ km}}{40'}$. Temps au retour = 40 minutes.

Vitesse moyenne = $\frac{10 \text{ km}}{100'} = \frac{6 \text{ km}}{60'} = \underline{\underline{6 \text{ km/h}}}$.

Il serait tentant de croire que la vitesse moyenne cherchée est la moyenne entre la vitesse à l'aller et la vitesse au retour, soit 6,25 km/h. Ce n'est pas le cas, car lorsque la distance est fixe, plus la vitesse est grande, plus le temps est petit. La vitesse n'est donc pas proportionnelle au temps.

- Supposons à nouveau que la distance entre le domicile de Luc et son lieu de travail est de 5 km.

Vitesse au retour = $\frac{30 \text{ km}}{60'} = \frac{5 \text{ km}}{10'}$. Temps au retour = 10 minutes.

Vitesse moyenne entre l'aller et le retour = $\frac{24 \text{ km}}{60'} = \frac{10 \text{ km}}{25'}$.

Temps total entre l'aller et le retour = 25 minutes.

Temps à l'aller = 25 - 10 = 15 minutes.

Vitesse à l'aller = $\frac{5 \text{ km}}{15'} = \frac{20 \text{ km}}{60'} = \underline{\underline{20 \text{ km/h}}}$.

- c) On continue à supposer que la distance entre le domicile de Luc et son lieu de travail est de 5 km.

$$\text{Vitesse à l'aller} = \frac{25 \text{ km}}{60'} = \frac{5 \text{ km}}{12'}. \text{ Temps de l'aller} = 12 \text{ minutes.}$$

La vitesse moyenne entre l'aller et le retour doit être de 50 km/h.

$$\text{Vitesse moyenne entre l'aller et le retour} = \frac{50 \text{ km}}{60'} = \frac{10 \text{ km}}{12'}$$

Temps pour l'aller et le retour = 12 minutes.

Comme Luc a déjà mis 12 minutes à l'aller, il ne lui restera que 0 minute pour effectuer le retour. Donc, **aucune vitesse ne peut remplir les conditions données.**

On peut généraliser la réponse en disant que si quelqu'un effectue une première moitié de trajet à une certaine vitesse, il n'existe pas de vitesse pour la seconde moitié qui fasse que la vitesse moyenne sur toute la distance soit égale ou supérieure au double de la vitesse de la première moitié du trajet.

Cela illustre parfaitement les deux adages suivants : *rien ne sert de courir, il faut partir à temps, et le temps perdu ne se rattrape jamais.*

- d) Soit d , la moitié de la totalité du parcours ; t_1 , le temps mis pour effectuer la première moitié du trajet ; t_2 , le temps mis pour effectuer la seconde moitié ; v_m , la vitesse moyenne.

$$V_m = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{v_2 + v_1}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_2 + v_1}$$

Cette formule aurait pu être utilisée pour résoudre les exercices a, b et c.

$$\text{a) } v_m = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7,5}{7,5 + 5} = 6$$

$$\text{b) } 24 = \frac{2 \cdot v_1 \cdot 30}{v_1 + 30} \Rightarrow v_1 = 20$$

$$\text{c) } 50 = \frac{2 \cdot 25 \cdot v_2}{25 + v_2} \Rightarrow 1250 + 50v_2 = 50v_2 \Rightarrow 1250 = 0 \Rightarrow \text{aucune solution.}$$