**69. Les récompenses** ***

Un maître de mathématiques fait l'annonce suivante à ses 20 élèves : « Afin de vous récompenser pour votre excellent travail durant cette année scolaire, j'offrirai à certain d'entre vous une récompense. Demain, je vous demanderai de vous mettre dans une position telle que le premier ne voit aucun de ses camarades, que le 2ème ne voit que le premier, que le 3ème ne voit que les deux premiers, que le 4ème ne voit que les trois premiers, et ainsi de suite, jusqu'au 20ème qui sera le seul à voir tous ses camarades. Ensuite, je mettrai sur la tête de chacun un chapeau bleu ou rouge. Puis je demanderai à chacun, du 20ème au premier, à tour de rôle, de prononcer le mot *bleu* ou *rouge*. Je dirai *juste* à chaque élève dont le mot prononcé correspond à la couleur de son chapeau, et *faux*, aux autres. Ceux à qui je dirai *juste* recevront une récompense ».

Les 20 élèves ont un jour pour élaborer une stratégie. Combien d'élèves, au maximum, seront-ils sûrs de recevoir une récompense ? (Si vous êtes en panne d'inspiration, lisez le premier paragraphe de la solution, et continuez ensuite la recherche)

**Solution**

Les élèves se sont mis d'accord sur le fait que le dernier élève (le 20ème et premier interrogé) énoncera *bleu* si le nombre total de chapeaux bleus qu'il voit est pair, et dira *rouge* si le nombre total de chapeaux bleus qu'il voit est impair.

Voyons ce qui va se passer à l'aide d'un exemple. Dans le tableau suivant, les élèves, numérotés de 1 (celui qui ne voit aucun de ses camarades) à 20 (celui qui voit tous ses camarades) ont été mis dans la première ligne. Dans la 2ème ligne, on a mis la couleur des chapeaux de chacun (B pour bleue et R pour rouge). Les nombres de la troisième ligne indiquent le nombre de chapeaux bleus vus par chaque élève.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | R | B | R | R | R | R | B | B | R | B | B | B | B | B | R | B | R | B |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 |

Le 20ème élève voit 11 chapeaux bleus. Il doit annoncer *rouge* selon l'accord passé avec ses camarades. Comme lui-même a un chapeau bleu, il entend le maître dire *faux*. Le 20ème élève ne recevra pas de récompense.

Grâce à l'annonce faite par le 20ème élève, tous les élèves savent qu'il y a un nombre total impair de chapeaux bleus portés par les 19 premiers élèves.

Le 19ème élève voit 11 (nombre impair) chapeaux bleus. Il est donc sûr de porter un chapeau rouge. Il annonce *rouge* et le maître dit *juste*. Tous les élèves savent maintenant que le 19ème élève porte un chapeau rouge.

Le 18ème élève sait qu'il y a toujours un nombre total impair de chapeaux bleus portés par les 18 premiers élèves. Comme il en voit 10, il en conclut qu'il a lui-même un chapeau bleu. Il annonce *bleu* et le maître dit *juste*. Tous les élèves savent maintenant que le 18ème élève porte un chapeau bleu.

Le 17ème élève sait maintenant que le nombre total de chapeaux bleus portés par les 17 premiers élèves est pair. Comme il en voit 10, il en conclut qu'il porte un chapeau rouge. Il annonce *rouge* et le maître dit *juste*. Tous les élèves savent maintenant que le 17ème élève porte un chapeau rouge.

Le 16ème élève sait que le nombre total de chapeaux bleus portés par les 16 premiers élèves est encore pair. Comme il en voit 9, il en conclut qu'il porte un chapeau bleu. Il annonce *bleu* et le maître dit *juste*. Tous les élèves savent maintenant que le 16ème élève porte un chapeau bleu.

Ainsi de suite, en continuant le même raisonnement, tous les élèves vont pouvoir, tour à tour, connaître la couleur de leur chapeau.

La stratégie élaborée par les élèves permet à **19 élèves** d'être sûrs d'obtenir une récompense. Le 20ème élève a une chance sur deux de l'obtenir.

Si le 20ème élève avait eu un chapeau rouge, les 20 élèves auraient eu la récompense et rien n'aurait changé dans le raisonnement des autres.

– Augustin Genoud, décembre 2016 –