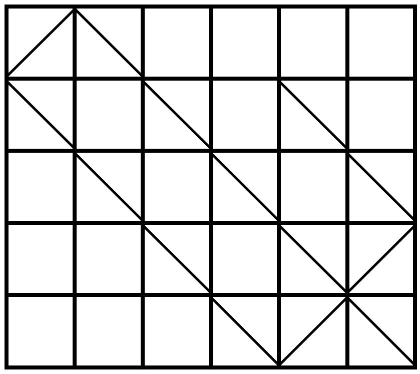
68. Les billards magiques ! * ** ***

Les billards magiques sont tous bordés par un rectangle ABCD (les côtés de ce rectangle sont les bandes des billards), et dans la même disposition que celui dessiné ci-dessous. Ils ont un petit trou à chacun des sommets A, B, C et D, et sont entièrement quadrillés de carrés d'un cm de côté. Une bille minuscule est projetée systématiquement de A, toujours dans la même direction (45 degrés avec la bande AB), et va rebondir contre les bandes jusqu'à ce qu'elle s'échappe par un des quatre trous. Les dimensions des billards sont données par les côtés x et y. Sur le croquis où une partie du tracé de la bille est dessinée, le billard mesure 6 cm par 5 cm, dimensions que l'on notera tout simplement (6 ; 5).



Trois questions sont posées pour chaque billard :

1. Quel est le nombre de carrés traversés par la bille avant de s'échapper ?
2. Combien de bandes la bille a-t-elle touchées avant de s'échapper ?
3. Par quel sommet la bille va-t-elle s'échapper ?

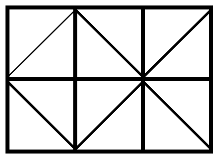
Répondez aux trois questions pour les billards dont les dimensions (x ; y) sont les suivantes :

a) 3 cm par 3 cm.
b) 3 cm par 2 cm.
c) 2 cm par 5 cm.
d) 6 cm par 5 cm.
e) 9 cm par 6 cm.
f) 14 cm par 8 cm.
g) 24 cm par44 cm.
h) 324 cm par 252 cm.

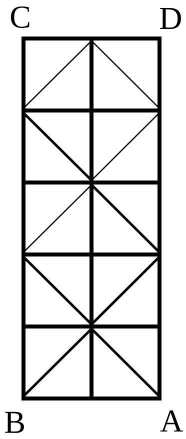
Après avoir résolu quelques exercices à l'aide de dessins, il faut chercher une méthode permettant de résoudre tous les problèmes de ce type sans passer par des dessins.

Solutions

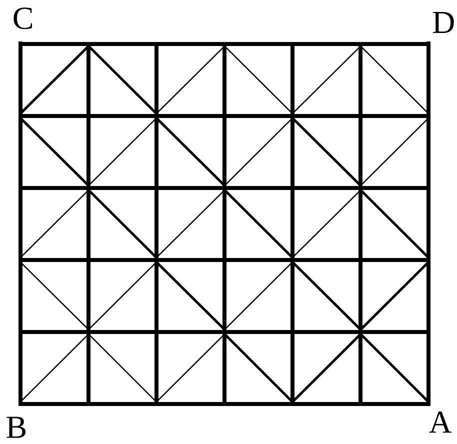
a) Sur une feuille quadrillée, on peut considérer que chaque carreau équivaut à 1 cm. Un petit dessin nous montre que la bille traverse 3 carrés, qu'elle ne touche aucune bande, et qu'elle s'échappe par C.
b) Le croquis ci-contre nous montre que la bille traverse 6 carrés, qu'elle touche 3 bandes, et qu'elle s'échappe par D.



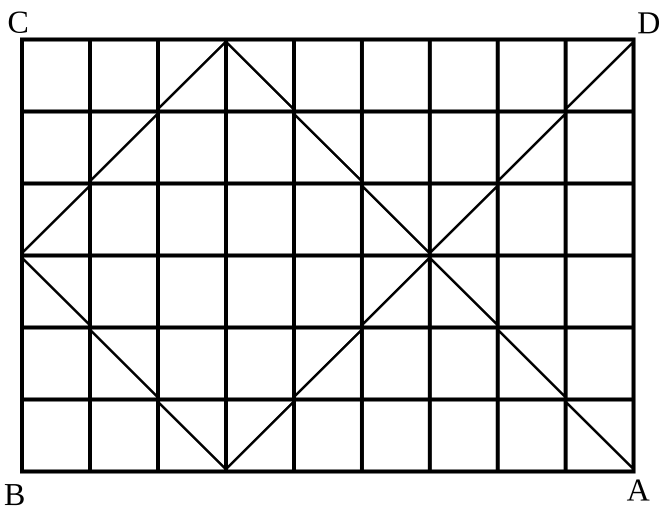
c) Le croquis suivant nous montre que la bille traverse 10 carrés, qu’elle touche 5 bandes, et qu’elle s’échappe par B.



d) Le croquis suivant nous montre que la bille traverse 30 carrés, qu’elle touche 9 bandes, et qu’elle s’échappe par B.



e) Le croquis suivant nous montre que la bille traverse 18 carrés, qu’elle touche 3 bandes, et qu’elle s’échappe par D.



Ce n’est pas surprenant qu’il y ait des correspondances entre le billard (3 ; 2) et le billard (9 ; 6). Le billard (9 ; 6) a des dimensions trois fois plus grandes que le billard (3 ; 2). Dans les deux cas, la bille touche le même nombre de bandes, et s’échappe par le même trou. Par contre, le nombre de carrés traversés est trois fois plus grand pour le billard (9 ; 6) que pour le billard (3 ; 2).

f) Voici la méthode permettant de résoudre tous les problèmes de ce type :

Représentons les dimensions du billard (x ; y) sous forme de fraction $\frac{x}{y}$.

Rendons cette fraction irréductible : $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

Appelons a, le plus grand diviseur de x et y. Pgdc (x; y) = a.

Appelons b, le nombre de bandes touchées par la bille.

Appelons c, le nombre de carrés traversés par la bille.

Appelons t, le trou par lequel s'échappe la bille.

L'observation d'un bon nombre d'exercices de ce type nous a permis d'établir les règles suivantes :

b = m + n -2	$c = \frac{x \cdot y}{\text{pgdc}(x;y)}$ $c = \frac{x \cdot y}{a}$	t = C si m et n sont de même parité (les deux pairs ou les deux impairs) t = B si m est pair et n est impair t = D si m est impair et n est pair

Le tableau suivant donne toutes les solutions des exercices.

	x	y	m	n	a	b	c	t
Question a	3	3	1	1	3	0	3	C
Question b	3	2	3	2	1	3	6	D
Question c	2	5	2	5	1	5	10	B
Question d	6	5	6	5	1	9	30	B
Question e	9	6	3	2	3	3	18	D
Question f	14	8	7	4	2	9	56	D
Question g	24	44	6	11	4	15	264	B
Question h	324	252	9	7	36	14	2268	C