

65. Les derniers chiffres d'un produit ! * ** ***

Le but de cet exercice revient à trouver les derniers chiffres d'un produit de deux nombres entiers positifs. Pour répondre aux questions suivantes, les seuls outils pouvant être utilisés sont une feuille de papier et de quoi écrire (les calculatrices et autres outils informatiques sont donc interdits).

Pour les exercices allant de a à e, si votre réponse est non, donnez un exemple qui montre que vous avez raison.

Lorsque l'on demande le nombre formé par les derniers chiffres d'un nombre, il faut prendre les chiffres dans l'ordre où ils apparaissent, de gauche à droite. Exemple : le nombre formé par les deux derniers chiffres de 75'432 est 32 (et non pas 23).

- a) Sachant que $8 \cdot 3 = 24$, peut-on conclure que tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 8 et l'autre par 3 finissent par 4 ?
- b) Sachant que $27 \cdot 34 = 918$, peut-on conclure que tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 27 et l'autre par 34 finissent par 18 ?
- c) Sachant que $85 \cdot 6 = 510$, peut-on conclure que tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 85 et l'autre par 6 finissent par 10 ?
- d) Sachant que $4534 \cdot 242 = 1'097'228$, peut-on conclure que tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 242 et l'autre par 534 finissent par 228 ?
- e) Sachant que $4534 \cdot 242 = 1'097'228$, peut-on conclure que tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 242 et l'autre par 34 finissent par 228 ?
- f) Les exercices précédents vous ont certainement permis de déterminer quelques règles concernant les derniers chiffres d'un produit de deux nombres. Énoncez-les de manière la plus simple possible.
- g) Quel est le nombre formé par les deux derniers chiffres du produit de $2567 \cdot 327'152$?
- h) Quel est le nombre formé par les trois derniers chiffres du produit de $1969 \cdot 40'878$?
- i) Quel est le dernier chiffre de 3^{60} ?
- j) Quel est le nombre formé par les deux derniers chiffres de 3^{60} ?
- k) Quel est le nombre formé par les trois derniers chiffres de 3^{60} ?

Solutions

- a) **Oui**.
- b) **Oui**.
- c) **Non**. Exemple : $185 \cdot 96 = 17'760$.
- d) **Oui**.
- e) **Non**. Exemple : $242 \cdot 834 = 201'828$.
- f) La réponse à cette question est donnée à l'aide d'un exemple.
Sachant que $73'583 \cdot 9612 = 707'279'796$, nous pouvons affirmer ceci :
 - Tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 3 et l'autre par 2 finissent par 6.
 - Tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 83 et l'autre par 12 finissent par 96.
 - Tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 583 et l'autre par 612 finissent par 796.

- Tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 3583 et l'autre par 9612 finissent par 9796.
 - Tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 83 et l'autre par 2 ne finissent pas forcément par 96. Tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 583 et l'autre par 12 ne finissent pas forcément par 796. Tous les produits de deux nombres dont l'un se termine par 583 et l'autre par 9612 ne finissent pas forcément par 796.
- g) **84**. Il suffit de chercher les deux derniers chiffres du produit de $67 \cdot 52$ (en ne s'intéressant qu'aux deux colonnes de droite dans le calcul manuel appris dans notre enfance) qui sont les deux derniers chiffres des nombres 2567 et 327'152.
- h) **782**. Il suffit de chercher les trois derniers chiffres du produit de $969 \cdot 878$.
- i) Pour connaître le dernier chiffre d'un produit de deux nombres, il suffit de s'occuper du dernier chiffre des deux nombres. On sait que $3^4 (= 81)$ se termine par 1. Alors, $3^8 (= 3^4 \cdot 3^4)$ se termine également par 1. $3^{12} (= 3^8 \cdot 3^4)$ se termine aussi par 1. $3^{16} (= 3^{12} \cdot 3^4)$ se termine aussi par 1. Donc, $3^4, 3^8, 3^{12}, 3^{16}, 3^{20}, \dots, 3^{60}$ se terminent également par **1**.
- j) Pour connaître les deux derniers chiffres d'un produit de deux nombres, il suffit de s'occuper des deux derniers chiffres des deux nombres. On sait que $3^5 (= 243)$ se termine par 43. Alors, $3^{10} (= 3^5 \cdot 3^5)$ se termine par 49. En effet, il suffit de multiplier 43 par 43 par la technique apprise dans notre enfance tout en ne s'occupant que des deux colonnes de droite. $3^{20} (= 3^{10} \cdot 3^{10})$ se termine par 01 (deux derniers chiffres de $49 \cdot 49$). $3^{40} (= 3^{20} \cdot 3^{20})$ se termine par 01. $3^{60} (= 3^{40} \cdot 3^{20})$ se termine par **01**.
- k) Pour connaître les trois derniers chiffres d'un produit de deux nombres, il suffit de s'occuper des trois derniers chiffres des deux nombres. On sait que $3^5 (= 243)$ se termine par 243. Alors, $3^{10} (= 3^5 \cdot 3^5)$ se termine par 049. $3^{20} (= 3^{10} \cdot 3^{10})$ se termine par 401 (trois derniers chiffres de 49 fois 49). $3^{40} (= 3^{20} \cdot 3^{20})$ se termine par 801. $3^{60} (= 3^{40} \cdot 3^{20})$ se termine par **201**.