61. Les droites ! **   ***

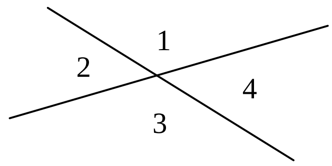
Guy a dessiné n droites dans un plan. Deux d'entre elles ne sont jamais parallèles et trois d'entre elles ne sont jamais concourantes (elles ne se croisent jamais en un point unique). Ces droites divisent le plan en un certain nombre de régions distinctes.

Combien de régions va-t-il obtenir si :

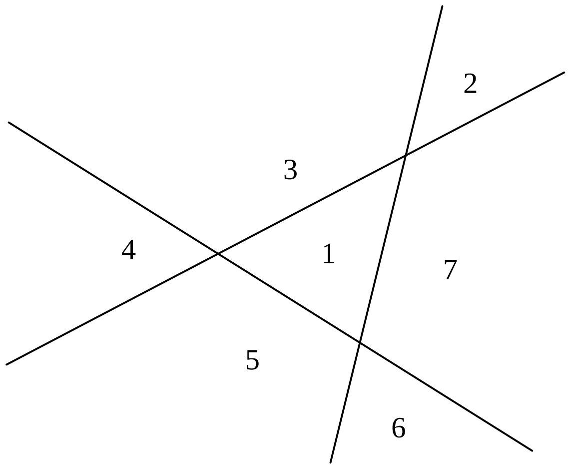
a) $n = 2$.	c) $n = 4$.	e) $n = 14$
b) $n = 3$.	d) $n = 5$.	f) $n = 100$.

Solutions

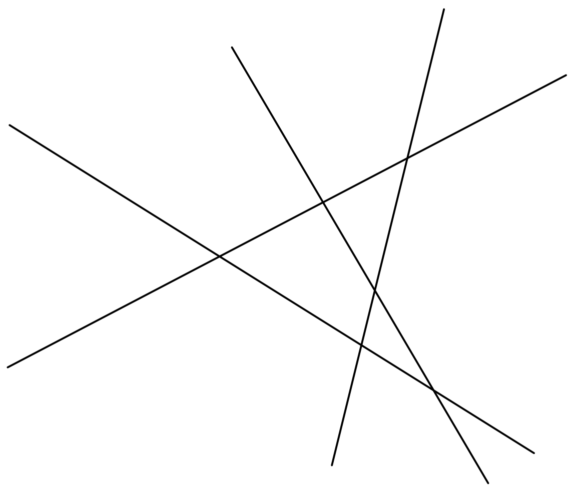
a) Deux droites divisent le plan en **4 régions**.



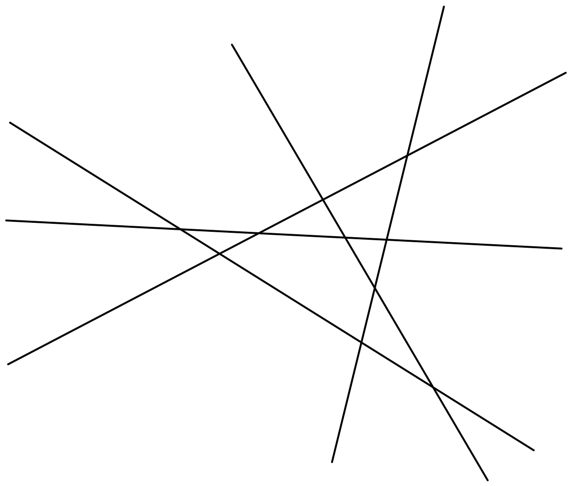
b) Dessinons les trois droites. On constate qu'il y a **7 régions**.



c) Dessinons les quatre droites et comptons les régions. Il y en a **11**.



d) Dessinons les cinq droites et comptons les régions. Il y en a **<u>16</u>**.



e) Pour 14 droites, le dessin devient problématique. Dans ce cas, on construit un tableau et on essaie de comprendre comment on trouve le nombre de régions. La suite 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, … est facile à construire : 1 + 1 = 2 ; 2 + 2 = 4 ; 4 + 3 = 7 ; 7 + 4 = 11 ; 11 + 5 = 16 ; 16 + 6 = 22 , etc.

Avec 14 droites, on obtient **<u>106 régions</u>**.

Nombre de droites	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nombre de régions	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79	92	106

f) Pour 100, la technique utilisée au point précédent est longue et fastidieuse. Il nous faut trouver la fonction - si elle existe - liant le nombre de régions au nombre de droites. La méthode pour obtenir cette fonction est décrite en détail à l'exercice 36 de cette même rubrique. Elle est appelée méthode des différences et est illustrée par le tableau ci-dessous. Pour comprendre comment cela fonctionne, il faut impérativement se référer à l'exercice 36 de la même rubrique.

Nombre de droites	0		1		2		3		4		5	x
Nombre de régions	1		2		4		7		11		16	f (x)
Premières différences		1		2		3		4		5		
Deuxièmes différences			1		1		1		1			

On sait que la fonction cherchée est de la forme $ax^2 + bx + c$, car il faut aller aux deuxièmes différences pour obtenir une ligne avec des nombres identiques. On a alors :

f (0) = c = 1.

f (1) = a + b + c = 2

f (2) = 4a + 2b + c = 4.

La résolution de ce système de trois équations à trois inconnues donne c = 1, a = 1/2 et b = 1/2.

D'où f (x) = $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

f (100) = 5051. Cent droites déterminent **<u>5051 régions</u>**.

– Augustin Genoud, avril 2016 –