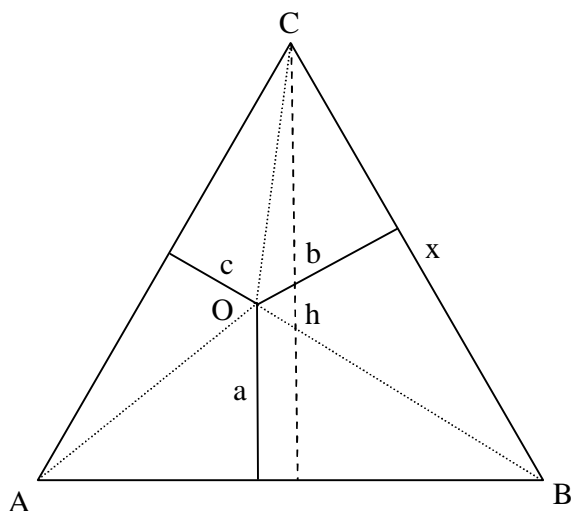


### 58. Théorème de Viviani ! \*\*

Le triangle ABC donné dans le croquis suivant est équilatéral. Appelons  $x$  son côté, et  $h$  sa hauteur. La distance du point O aux trois côtés du triangle est respectivement  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

- Calculez l'aire du triangle ABC, à partir de l'aire de chacun des triangles ABO, BCO et ACO.
- Calculez l'aire du triangle ABC, à partir de  $x$  et  $h$ .
- Que pouvez-vous déduire des résultats obtenus aux points a et b ?



### Solutions

a) Aire de ABO =  $\frac{x \cdot a}{2}$  . Aire de BCO =  $\frac{x \cdot b}{2}$  . Aire de ACO =  $\frac{x \cdot c}{2}$  .

Aire de ABC =  $\frac{x}{2}(a + b + c)$  .

b) Aire de ABC =  $\frac{x \cdot h}{2}$  .

- c) On peut déduire que  $h = a + b + c$  ! (c'est le théorème de Viviani). Ceci est vrai quelle que soit la position du point O à l'intérieur du triangle équilatéral.

Vincenzo Viviani (1622 – 1703) est un mathématicien, physicien et astronome italien, disciple de Galilée.

Le théorème de Viviani peut être généralisé : dans un polygone régulier convexe à  $n$  côtés, la somme des distances d'un point O intérieur au polygone aux côtés du polygone est indépendante de la position du point O et elle est égale à  $n$  fois l'apothème (distance du segment joignant le centre du polygone au milieu d'un côté).