

52. Les puissances ! ** ***

$5^2 = 25$, alors 25 est un carré. $4^3 = 64$, alors 64 est un cube. $3^4 = 81$, alors 81 est une puissance quatrième. $6^5 = 7776$, alors 7776 est une puissance cinquième. Etc.

L'utilisation d'une calculatrice est recommandée pour les exercices suivants dans lesquels ne peuvent intervenir que des nombres entiers positifs.

1. Le nombre 729 est-il à la fois un carré et un cube ? Si oui, de quel nombre est-il le carré et de quel nombre est-il le cube ?
2. Le nombre 4096 est-il à la fois un carré et un cube ? Si oui, de quel nombre est-il le carré et de quel nombre est-il le cube ?
3. L'affirmation suivante « Tous les nombres qui sont à la fois un carré et un cube sont des puissances sixièmes » est vraie. Vérifiez cette affirmation en cherchant d'abord les trois nombres inférieurs à 1000 qui sont à la fois des carrés et des cubes.
4. Le nombre 1024 est-il à la fois un carré et une puissance cinquième ? Si oui, de quel nombre est-il le carré et de quel nombre est-il la puissance cinquième ?
5. L'affirmation suivante « Tous les nombres qui sont des puissances dixièmes sont aussi des carrés et des puissances cinquièmes » est vraie. Vérifiez cette affirmation avec les nombres $1024 = 2^{10}$ et $59'049 = 3^{10}$.
6. De quelles autres puissances inférieures à 12 sont tous les nombres qui sont des puissances douzièmes ? Vérifiez vos réponses avec les nombres $531'441 = 3^{12}$ et $16'777'216 = 4^{12}$.
7. De quelles autres puissances inférieures à n (nombre entier positif) sont tous les nombres qui sont des puissances énièmes ?

Solutions

1. Oui, 729 est le carré de 27 et le cube de 9.
2. Oui, 4096 est le carré de 64 et le cube de 16.
3. Les trois nombres inférieurs à 1000 qui sont à la fois des carrés et des cubes sont 1, 64 et 729. On peut vérifier que $1^6 = 1$, $2^6 = 64$ et $3^6 = 729$.
4. Oui, 1024 est le carré de 32 et la puissance cinquième de 4.
5. $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 = 32^2$. $1024 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$.
 $59'049 = 3^{10} = (3^5)^2 = 243^2$. $59'049 = 3^{10} = (3^2)^5 = 9^5$.
6. Ils sont aussi des carrés, des cubes, des puissances 4èmes et des puissances 6èmes.
 $531'441 = 729^2 = 81^3 = 27^4 = 9^6$. Note : $531'441 = 3^{12} = (3^6)^2 = (3^4)^3 = (3^3)^4 = (3^2)^6$.
 $16'777'216 = 4096^2 = 256^3 = 64^4 = 16^6$.
7. Les autres puissances sont tous les diviseurs de n. Exemple : $2^{15} = 32'768$. Comme 3 et 5 sont des diviseurs de 15, alors il existe forcément un nombre qui élevé à la puissance 3 donne 32'768 (c'est 32). Il existe aussi un nombre qui élevé à la puissance 5 donne 32'768 (c'est 8).