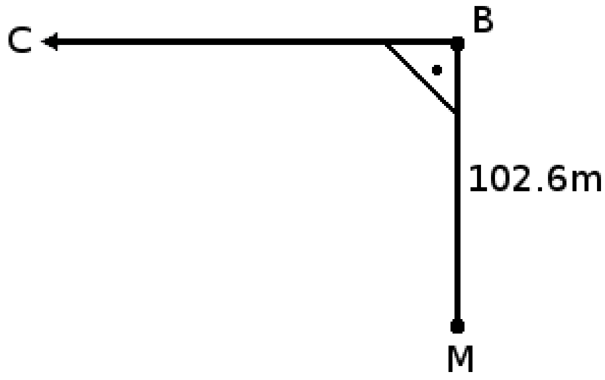
Énoncé

De la page http://www.jeuxmath.ch/mois.html, problème numéro 50.

Médor poursuit son maître !

Le chien Médor est au point M, à 102.6 m de Bill, son maître, qui est au point B. Médor et Bill partent en même temps. Le chien va deux fois plus vite que son maître. Bill court en direction de C (BC est perpendiculaire à BM) et Médor court toujours en direction de son maître.



Quelle distance doit parcourir Médor pour rattraper son maître ?

Notation

Soit $E=(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. Tous les vecteurs seront exprimés dans cette base. Par exemple : $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\cdot\vec{e}_x+b\cdot\vec{e}_y \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$. La norme de $\vec{v}$ (sa longueur) est notée : $\|\vec{v}\|=\sqrt{a^2+b^2}$. On note les dérivées sous la forme $\dot{x}=\frac{d}{dt}x$. Ainsi $\dot{\vec{v}}=\begin{pmatrix}\dot{a}\\\dot{b}\end{pmatrix}=\dot{a}\cdot\vec{e}_x+\dot{b}\cdot\vec{e}_y$.

On commencera par une résolution du problème de façon générale (vitesse et direction de Bob quelconque), puis on retournera au cas particulier de l'énoncé ($\alpha=0$, $\lambda=2$ et $d=102.6m$). Cette approche nous permettra de mieux expliquer la méthode de Sam Loyd (en page 5).

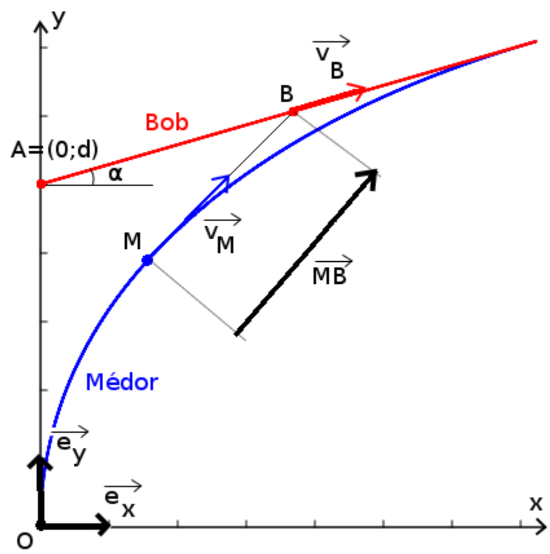
Résolution

Bob (au point B) décrit un mouvement rectiligne uniforme (appelé MRU en physique *(4)*) :

$$\overrightarrow{OB(t)}=\overrightarrow{OA}+\vec{V}_B\cdot t \quad , \quad t\geq 0$$

Où :

- $A=(0;d)\in\mathbb{R}^2$, $d>0$ est son point de départ en $t=0$.
- $\vec{V}_B=\begin{pmatrix}V_B\cdot\cos(\alpha)\\V_B\cdot\sin(\alpha)\end{pmatrix}$, $V_B>0$ son vecteur vitesse.
- $\alpha\in\mathbb{R}$ sa direction (horizontale si $\alpha=0$).
- Et $t\geq 0$ le temps, en secondes.



La trajectoire de Médor (au point M) :

$$\overrightarrow{OM}(t)=\begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \quad , \quad t\geq 0 \quad \text{et} \quad x_M(0)=y_M(0)=0 \quad \text{(départ en O comme ci-dessus)}$$

Soient :

- $\overrightarrow{V_M}(t)=\dot{\overrightarrow{OM}}(t)$ son vecteur vitesse, de norme constante $V_M=\left\|\overrightarrow{V_M}(t)\right\|$.
- $\lambda=\dfrac{V_M}{V_B}>1$ le rapport des vitesses entre Bob et Médor (le chien court plus vite).

Il court toujours en direction de son maître donc $\overrightarrow{V_M}(t)$ (tangent à sa trajectoire), est colinéaire au vecteur distance qui le sépare de ce dernier, càd $\overrightarrow{MB}(t)$. Alors si $\overrightarrow{MB}(t)\neq\vec{0}$:

$$\overrightarrow{V_M}(t)=V_M\cdot\frac{\overrightarrow{MB}(t)}{\left\|\overrightarrow{MB}(t)\right\|}$$

Comme $\overrightarrow{MB}(t)=\overrightarrow{OB}(t)-\overrightarrow{OM}(t)=\begin{pmatrix} V_B\cdot\cos(\alpha)\cdot t-x_M(t) \\ V_B\cdot\sin(\alpha)\cdot t-y_M(t)+d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_M}(t)=\begin{pmatrix} \dot{x_M}(t) \\ \dot{y_M}(t) \end{pmatrix}$ on obtient :

(I) $$\begin{pmatrix} \dot{x_M}(t) \\ \dot{y_M}(t) \end{pmatrix}=\frac{V_M}{\sqrt{\left[V_B\cdot\cos(\alpha)\cdot t-x_M(t)\right]^2+\left[V_B\cdot\sin(\alpha)\cdot t-y_M(t)+d\right]^2}}\cdot\begin{pmatrix} V_B\cdot\cos(\alpha)\cdot t-x_M(t) \\ V_B\cdot\sin(\alpha)\cdot t-y_M(t)+d \end{pmatrix}$$

C'est un système d'équations différentielles à deux inconnues $x_M(t)$ et $y_M(t)$. La trajectoire de la bête est décrite.

Pour plus de lisibilité posons :

(II) $x(t)=V_B\cdot\cos(\alpha)\cdot t-x_M(t)$, $y(t)=V_B\cdot\sin(\alpha)\cdot t-y_M(t)+d$

En dérivant :

(III) $\dot{x}(t)=V_B\cdot\cos(\alpha)-\dot{x_M}(t)$, $\dot{y}(t)=V_B\cdot\sin(\alpha)-\dot{y_M}(t)$

On obtient :

(IV) $\dot{x_M}(t)=V_B\cdot\cos(\alpha)-\dot{x}(t)$, $\dot{y_M}(t)=V_B\cdot\sin(\alpha)-\dot{y}(t)$

Réécrivons l'équation *(I)* avec *(II)* et *(IV)* :

$$\begin{pmatrix} V_B\cdot\cos(\alpha)-\dot{x}(t) \\ V_B\cdot\sin(\alpha)-\dot{y}(t) \end{pmatrix}=\frac{V_M}{\sqrt{\left[x(t)\right]^2+\left[y(t)\right]^2}}\cdot\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Comme $V_M=\lambda\cdot V_B$:

(V) $V_B\cdot\cos(\alpha)-\dot{x}(t)=\dfrac{\lambda\cdot V_B\cdot x(t)}{\sqrt{\left[x(t)\right]^2+\left[y(t)\right]^2}}$, $V_B\cdot\sin(\alpha)-\dot{y}(t)=\dfrac{\lambda\cdot V_B\cdot y(t)}{\sqrt{\left[x(t)\right]^2+\left[y(t)\right]^2}}$, où

$$\overrightarrow{MB}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\neq\vec{0} \quad , \quad t\geq 0$$

Notre nouveau système avec pour inconnues les composantes de $\overrightarrow{MB}(t)$. Une fois $x(t)$ et $y(t)$ résolues il suffira d'utiliser l'équation *(II)* afin de retrouver $x_M(t)$ et $y_M(t)$ (la trajectoire du chien).

On ne vas pas résoudre *(V)*, ce n'est pas nécessaire pour obtenir la distance parcourue par Médor. Intéressons-nous à celle qui le sépare de Bob $\|\overrightarrow{MB(t)}\|$. Sa dérivée :

$$\frac{d}{dt}\|\overrightarrow{MB(t)}\|=\frac{d}{dt}\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}=\dot{x}(t)\cdot\frac{x(t)}{\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}}+\dot{y}(t)\cdot\frac{y(t)}{\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}}$$

Avec *(V)* :

$$\frac{d}{dt}\|\overrightarrow{MB(t)}\|=\dot{x}(t)\cdot\frac{V_B\cdot\cos(\alpha)-\dot{x}(t)}{\lambda\cdot V_B}+\dot{y}(t)\cdot\frac{V_B\cdot\sin(\alpha)-\dot{y}(t)}{\lambda\cdot V_B} \quad ,$$

(VI) $$\frac{d}{dt}\|\overrightarrow{MB(t)}\|=\frac{1}{\lambda}[\cos(\alpha)\cdot\dot{x}(t)+\sin(\alpha)\cdot\dot{y}(t)-\frac{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}{V_B}]$$

Développons cette somme de carrés. Avec *(III)* :

$$[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2=[V_B\cdot\cos(\alpha)-\dot{x_M}(t)]^2+[V_B\cdot\sin(\alpha)-\dot{y_M}(t)]^2$$

On utilise l'identité trigonométrique $[\cos(\alpha)]^2+[\sin(\alpha)]^2=1$ *(1)* :

$$[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2=V_B^2+[\dot{x_M}(t)]^2+[\dot{y_M}(t)]^2-2\cdot V_B\cdot[\cos(\alpha)\cdot\dot{x_M}(t)+\sin(\alpha)\cdot\dot{y_M}(t)]$$

Sachant que $V_M=\|\overrightarrow{V_M(t)}\|=\left\|\dot{\overrightarrow{OM(t)}}\right\|=\sqrt{[\dot{x_M}(t)]^2+[\dot{y_M}(t)]^2}$ et que $V_M=\lambda\cdot V_B$ (page 2) :

$$[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2=(1+\lambda^2)\cdot V_B^2-2\cdot V_B\cdot[\cos(\alpha)\cdot\dot{x_M}(t)+\sin(\alpha)\cdot\dot{y_M}(t)]$$

Avec *(IV)* :

$$[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2=(1+\lambda^2)\cdot V_B^2-2\cdot V_B\cdot[\cos(\alpha)\cdot[V_B\cdot\cos(\alpha)-\dot{x}(t)]+\sin(\alpha)\cdot[V_B\cdot\sin(\alpha)-\dot{y}(t)]] \quad ,$$

$$[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2=(1+\lambda^2)\cdot V_B^2-2\cdot V_B\cdot[V_B-\cos(\alpha)\cdot\dot{x}(t)-\sin(\alpha)\cdot\dot{y}(t)] \quad ,$$

$$\frac{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}{V_B}=(1+\lambda^2)\cdot V_B-2\cdot V_B+2\cdot\cos(\alpha)\cdot\dot{x}(t)+2\cdot\sin(\alpha)\cdot\dot{y}(t) \quad ,$$

(VII) $$\frac{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}{V_B}=(\lambda^2-1)\cdot V_B+2\cdot\cos(\alpha)\cdot\dot{x}(t)+2\cdot\sin(\alpha)\cdot\dot{y}(t)$$

On insère *(VII)* dans *(VI)* :

$$\lambda\cdot\frac{d}{dt}\|\overrightarrow{MB(t)}\|=\cos(\alpha)\cdot\dot{x}(t)+\sin(\alpha)\cdot\dot{y}(t)-[(\lambda^2-1)\cdot V_B+2\cdot\cos(\alpha)\cdot\dot{x}(t)+2\cdot\sin(\alpha)\cdot\dot{y}(t)] \quad ,$$

$$\lambda\cdot\frac{d}{dt}\|\overrightarrow{MB(t)}\|+(\lambda^2-1)\cdot V_B+\cos(\alpha)\cdot\dot{x}(t)+\sin(\alpha)\cdot\dot{y}(t)=0$$

Puis en intégrant des deux cotés ($\alpha,\lambda=const$) :

$$\lambda\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|+(\lambda^2-1)\cdot V_B\cdot t+\cos(\alpha)\cdot x(t)+\sin(\alpha)\cdot y(t)+K=0 \quad \text{où} \quad K=const\in\mathbb{R}$$

Cette constante est à déterminer d'après les conditions initiales. De la page 2 et l'équation *(II)* on a $x(0)=-x_M(0)=0$ et $y(0)=-y_M(0)+d=d$.

Ainsi (équation *(V)*) : $\|\overrightarrow{MB(0)}\|=\sqrt{[x(0)]^2+[y(0)]^2}=d>0$. D'où (en $t=0$) :

$$\lambda\cdot d+\sin(\alpha)\cdot d+K=0\Rightarrow K=-[\lambda+\sin(\alpha)]\cdot d$$

On obtient finalement :

(VIII) $\lambda\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|+(\lambda^2-1)\cdot V_B\cdot t+\cos(\alpha)\cdot x(t)+\sin(\alpha)\cdot y(t)-[\lambda+\sin(\alpha)]\cdot d=0$, où

$$\overrightarrow{MB(t)}=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\neq\vec{0} \quad , \quad t\geq 0$$

Relation très intéressante puisque elle lie le vecteur distance Médor-Bob $\overrightarrow{MB(t)}$ au temps t. Donc lorsqu'il rattrapera son maître on aura $\overrightarrow{MB(t)}$ proche de zéro. Ainsi on pourra isoler t puis retrouver la distance parcourue.

Mais avant de supprimer des termes hâtivement, étudions *(VIII)* de façon plus rigoureuse. Pour ce faire travaillons sur :

$$\cos(\alpha)\cdot x(t)+\sin(\alpha)\cdot y(t)=\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}\cdot[\cos(\alpha)\cdot\frac{x(t)}{\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}}+\sin(\alpha)\cdot\frac{y(t)}{\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}}]$$

On pose :

$$\cos[\beta(t)]=\frac{x(t)}{\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}} \quad , \quad \sin[\beta(t)]=\frac{y(t)}{\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}} \quad \text{où} \quad \beta(t)\in\mathbb{R} \quad .$$

L'existence de $\beta(t)$ est garantie car les deux quotients ci-dessus décrivent un point sur le cercle trigonométrique *(1)* (somme des carrés unitaire). On obtient, toujours avec de la trigonométrie *(2)* :

$$\cos(\alpha)\cdot x(t)+\sin(\alpha)\cdot y(t)=\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}\cdot[\cos(\alpha)\cdot\cos[\beta(t)]+\sin(\alpha)\cdot\sin[\beta(t)]] \quad ,$$

$$\cos(\alpha)\cdot x(t)+\sin(\alpha)\cdot y(t)=\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}\cdot\cos[\alpha-\beta(t)] \quad ,$$

(IX) $\cos(\alpha)\cdot x(t)+\sin(\alpha)\cdot y(t)=\|\overrightarrow{MB(t)}\|\cdot\cos[\alpha-\beta(t)]$

On insère *(IX)* dans *(VIII)* :

(X) $[\lambda+\cos[\alpha-\beta(t)]]\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|+(\lambda^2-1)\cdot V_B\cdot t-[\lambda+\sin(\alpha)]\cdot d=0$,

$$[\lambda+\cos[\alpha-\beta(t)]]\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|=[\lambda+\sin(\alpha)]\cdot d-(\lambda^2-1)\cdot V_B\cdot t$$

Comme $\lambda>1$ (page 2), $\lambda+\cos[\alpha-\beta(t)]>0$.

$\|\overrightarrow{MB(t)}\|>0$ d'après *(VIII)*, donc on a forcément $[\lambda+\sin(\alpha)]\cdot d-(\lambda^2-1)\cdot V_B\cdot t>0$.

Il faut alors ($V_B>0$) : $0\leq t<t_x$ où $t_x=\frac{\lambda+\sin(\alpha)}{\lambda^2-1}\cdot\frac{d}{V_B}$ ($t_x>0$).

Étudions *(X)* lorsque $t\to t_x, t<t_x$:

$$\lim_{t\to t_x, t<t_x}\{[\lambda+\cos[\alpha-\beta(t)]]\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|+(\lambda^2-1)\cdot V_B\cdot t-[\lambda+\sin(\alpha)]\cdot d\}=0 \quad ,$$

(XI) $\lim_{t\to t_x, t<t_x}\{[\lambda+\cos[\alpha-\beta(t)]]\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|\}=0$

On a les inégalités :

$$0<\lambda-1\leq\lambda+\cos[\alpha-\beta(t)]\Leftrightarrow 0<(\lambda-1)\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|\leq[\lambda+\cos[\alpha-\beta(t)]]\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|\to 0$$

Avec *(XI)* et le théorème des gendarmes *(3)* on en déduit que :

$$\lim_{t\to t_x, t<t_x}\{(\lambda-1)\cdot\|\overrightarrow{MB(t)}\|\}=\lim_{t\to t_x, t<t_x}\|\overrightarrow{MB(t)}\|=0$$

Médor et Bob se rejoignent lorsque $t\to t_x, t<t_x$. La supposition ci-dessus était correcte.

Comme Médor se déplace à vitesse constante (page 2), il a parcouru une distance $S_M = V_M \cdot t_x = \lambda \cdot V_B \cdot t_x$. D'où enfin :

(XII) $\boxed{S_M = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cdot [\lambda + \sin(\alpha)] \cdot d}$, $\boxed{t_x = \frac{\lambda + \sin(\alpha)}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{d}{V_B}}$

Dans l'énoncé de l'énigme on a $\alpha = 0$, $\lambda = 2$ et $d = 102.6\,m$. Alors $S_M = \frac{4}{3} \cdot d = 136.8\,m$.

Problème résolu !

Explications concernant la méthode de Loyd

Pour la suite on va tenter d'expliquer la méthode de Sam Loyd. Il prétend que t_x (pour $\alpha = 0$) est une moyenne de deux temps :

- Le temps mis par Médor pour rattraper Bob si ce dernier court dans sa direction.
- Le temps mis par Médor pour rattraper Bob si ce dernier s'en éloigne.

Dans le premier cas Bob est impatient de retrouver sa bestiole. Donc d'après le schéma en page 1, il court selon un angle $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} = -90°$. Ainsi (grâce à *(XII)*) ils se rencontreront au temps :

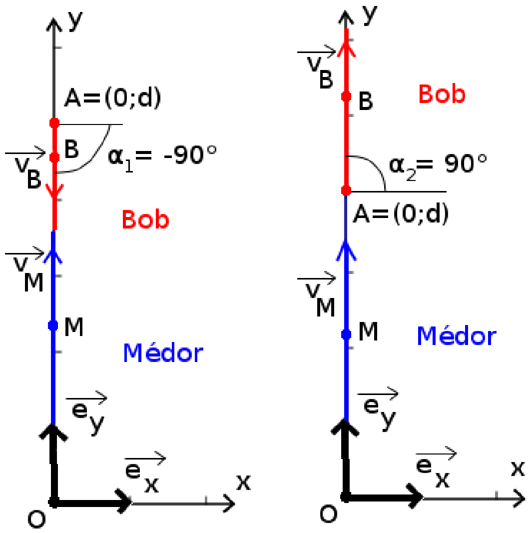
$$t_1 = t_x(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{d}{V_B} = \frac{1}{\lambda + 1} \cdot \frac{d}{V_B}$$

(temps minimal pour $t_x(\alpha)$)

Dans le deuxième cas il le fuit. C'est un abandon caractérisé. Sa direction est opposée à la précédente, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} = 90°$. D'où :

$$t_2 = t_x(\frac{\pi}{2}) = \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{d}{V_B} = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot \frac{d}{V_B}$$

(temps maximal pour $t_x(\alpha)$)



Premier cas *Second cas*

La moyenne des deux temps :

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = (\frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda + 1}) \cdot \frac{d}{2 \cdot V_B} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{d}{V_B}$$

On a bien $\frac{t_1 + t_2}{2} = t_x(0)$. La méthode de Loyd est vérifiée.

$\alpha = 0$ est la valeur médiane de $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Loyd a donc supposé qu'il en était de même pour les temps de rencontre. Ainsi il a directement calculé la médiane de t_1 et t_2 pour obtenir le temps en $\alpha = 0$: $t_x(0) = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot [t_x(-\frac{\pi}{2}) + t_x(\frac{\pi}{2})]$

Très astucieux car le problème, assez difficile pour $\alpha = 0$, est réduit à deux tâches plus aisées. En effet, dans les deux cas on a toujours $\overrightarrow{OM}(t), \overrightarrow{OB}(t) \in d(O, \vec{e}_y)$ où $d(O, \vec{e}_y)$ est une droite verticale passant par l'origine. t_1 et t_2 sont le résultat d'une simple intersection de droites.

A cause du sinus dans *(XII)*, cette approche n'est généralisable pour une direction α quelconque.

Autres

Remarque : si $\alpha=0$ et que Médor et Bob se rejoignent lorsque ce dernier a parcouru une distance d, le rapport des vitesses (λ) est égal au nombre d'or *(5)*.

Preuve : avec *(XII)* ils se rencontrent en $t_x=\frac{\lambda}{\lambda^2-1}\cdot\frac{d}{V_B}$. Pendant ce temps Bob a parcouru une distance d : $t_x=\frac{d}{V_B}$. Ainsi $\frac{\lambda}{\lambda^2-1}=1\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-1=0$. Comme $\lambda>0$, $\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Références

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_trigonom%C3%A9trique
2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A9_trigonom%C3%A9trique
3. https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_gendarmes
4. https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement_rectiligne_uniforme
5. https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27or