42. Les coupes du menuisier ! * ** ***

Un menuisier veut découper des morceaux de bois ayant la forme de parallélépipèdes rectangles en des cubes de 1 dm^3. Après chaque coupe, il peut déplacer les morceaux obtenus et les disposer comme il veut. Les morceaux ne peuvent pas être déplacés pendant une coupe. Il cherche à faire le minimum de coupes possible.

1. Son 1er morceau de bois a les dimensions suivantes : 1 dm, 2 dm et 2 dm. Combien de coupes doit-il faire ?
2. Son 2ème morceau de bois a les dimensions suivantes : 2 dm, 2 dm et 3 dm. Combien de coupes doit-il faire ?
3. Son 3ème morceau de bois est un cube de 3 dm de côté. Combien de coupes doit-il faire ?
4. Son 4ème morceau de bois a les dimensions suivantes : 3 dm, 3 dm et 10 dm. Combien de coupes doit-il faire ?
5. Son 5ème morceau de bois a les dimensions suivantes : 10 dm, 17 dm et 35 dm. Combien de coupes doit-il faire ?
6. Trouvez une méthode qui permet de trouver rapidement le nombre de coupes quelles que soient les dimensions du morceau de bois au départ.

Solutions

Pour simplifier, les dimensions des morceaux de bois (ou pièces) seront données sous forme de triplets. Exemple : (10,17,35) correspond à une pièce de dimensions 10 dm, 17 dm et 35 dm.

1. Partageons la pièce en 2 pièces identiques de dimensions (1,1,2). On met ces deux pièces ensemble et une seconde coupe nous permet d'obtenir les 4 cubes voulus. Il faut donc **2 coupes**.

   Avant d'aller plus loin, remarquons ceci :

   a) Pour obtenir des cubes d'1 dm^3, chaque coupe doit partager un parallélépipède rectangle en deux autres parallélépipèdes rectangles dont les dimensions sont des nombres entiers de dm.

   b) Si l'une des pièces obtenues peut être virtuellement complètement encastrée dans une autre, on peut éliminer la plus petite, car, lorsque le menuisier coupe la grande, il peut en même temps couper la petite.

   c) Appelons A, B et C, les faces respectives du parallélépipède rectangle de départ. On peut choisir de faire une coupe parallèle à A ou parallèle à B ou parallèle à C. Par contre, pour s'assurer un minimum de coupes, il faut, à chaque coupe, faire en sorte que les deux pièces obtenues aient un volume le plus proche possible (dans l'idéal, on cherche à obtenir après chaque coupe deux pièces identiques).

   Ces remarques ne sont pas forcément utiles pour résoudre les exercices 2 et 3, mais elles le seront lorsque les exercices deviendront plus complexes. Il existe souvent plusieurs cheminements pour arriver à la solution. Une seule sera donnée ici.

2. Première coupe : (2,2,3) devient (1,2,3) + (1,2,3). Une des pièces est éliminée.

   2ème coupe : (1,2,3) devient (1,1,3) + (1,1,3). Une des pièces est éliminée.

   Il est évident qu'il faut encore 2 coupes pour terminer. Il faut donc **4 coupes** en tout.

3. Une première coupe partage (3,3,3) en (1,3,3) + (2,3,3). La pièce (1,3,3) est éliminée.

   2ème coupe : (2,3,3) est partagée en (1,3,3) + (1,3,3). Une des deux pièces est éliminée.

   3ème coupe : (1,3,3) est partagée en (1,3,1) + (1,3,2). (1,3,1) est éliminée.

   4ème coupe : (1,3,2) est partagée en (1,3,1) + (1,3,1). Une des deux pièces est éliminée.

   Il faut encore deux coupes pour terminer. Il faut donc **6 coupes** en tout.

Remarquons que le cube d'1 dm^3, au centre du cube de 27 dm^3 possède 6 faces et qu'il faut toutes les couper pour isoler le cube central.

4. 1ère coupe : (3,3,10) est partagée en (3,3,5) + (3,3,5).
   2ème coupe : (3,3,5) est partagée en (3,3,2) + (3,3,3).
   Selon l'exercice précédent, à partir de (3,3,3), il faut 6 coupes pour terminer.
   Il faut donc un total de **<u>8 coupes</u>**.
5. 1ère coupe : (10,17,35) est partagée en (5,17,35) + (5,17,35).
   2ème coupe : (5,17,35) est partagée en (5,17,18) + (5,17,17).
   3ème coupe : (5,17,18) est partagée en (5,17,9) + (5,17,9).
   4ème coupe : (5,17,9) est partagée en (5,9,9) + (5,8,9).
   5ème coupe : (5,9,9) est partagée en (5,9,5) + (5,9,4).
   6ème coupe : (5,9,5) est partagée en (5,5,5) + (5,4,5).
   7ème coupe : (5,5,5) est partagée en (3,5,5) + (2,5,5).
   8ème coupe : (3,5,5) est partagée en (3,3,5) + (3,2,5).
   9ème coupe : (3,3,5) est partagée en (3,3,3) + (3,3,2).
   A partir de là, comme on a vu précédemment, il faut encore 6 coupes.
   Cela donne un total de **<u>15 coupes</u>**.
6. C'est mon ami Jérôme Gavin qui a trouvé la solution (géniale) permettant de connaître le nombre minimum de coupes. Voici cette solution :
   a) Diminuer d'une unité chacune des dimensions du parallélépipède rectangle de départ.
   b) Transformer ensuite chacune des dimensions en base 2.
   c) La somme de tous les chiffres obtenus en base 2 constitue la solution.

   Attention : Les éventuelles dimensions de départ égales à 1 doivent être éliminées. Ainsi, par exemple, si les dimensions d'un parallélépipède rectangle sont 1 dm, 4 dm et 13 dm, il faut partir non pas du triplet (1,4,13), mais du duo (4,13).

   Vérifions la solution de Jérôme Gavin avec les exercices précédents :

   A : Dimensions du parallélépipède rectangle de départ.

   B : Dimensions du parallélépipède rectangle de départ avec une unité en moins.

   C : Transformation des nombres de B en bases 2.

   Nombre de coupes : somme des chiffres de la colonne C.

	A	B	C	Nombre de coupes
Exercice 1	(1,2,2)	(1,1)	(1,1)	2
Exercice 2	(2,2,3)	(1,1,2)	(1,1,10)	4
Exercice 3	(3,3,3)	(2,2,2)	(10,10,10)	6
Exercice 4	(3,3,10)	(2,2,9)	(10,10,1001)	8
Exercice 5	(10,17,35)	(9,16,34)	(1001, 10000,100010)	15

Remarque : en base 2, il y a 1 chiffre pour les nombres 0 et 1, il y a 2 chiffres pour les nombres 2 et 3, il y a 3 chiffres pour les nombre allant de 4 à 7, il y a 4 chiffres pour les nombres allant de 8 à 15, il y a 5 chiffres pour les nombre allant de 16 à 31, il y a 6 chiffres pour les nombres allant de 32 à 63, etc. Ceci pouvant peut-être expliquer la trouvaille de Jérôme Gavin.

Note : Jérôme Gavin est l'auteur, avec Alain Schärlig, de deux livres d'histoire des mathématiques. Pour en savoir plus, consultez la rubrique « Liens » de mon site.

– Augustin Genoud, octobre 2014 –