38. La cible ! * ** ***

Voici un grand classique des compétitions de jeux mathématiques et logiques qui peut se décliner sous plein d'autres formes.

Marc joue avec un nombre illimité de fléchettes en visant une cible qui comporte différentes zones rapportant chacune un certain nombre de points qui s'additionnent chaque fois qu'une fléchette atteint l'une des zones. Certains scores (somme des points obtenus) sont impossibles à atteindre. Le problème consiste à déterminer le nombre de scores impossibles à atteindre ainsi que le plus grand total impossible à atteindre.

1. Dans un premier temps, les cibles ne comportent que deux zones et rapportent :

   a) 3 et 7 points.

   b) 4 et 6 points.

   c) 4 et 9 points.

   d) 9 et 12 points.

   e) 7 et 30 points.

2. Voyons deux cas avec trois zones (ne cherchez que le plus grand score impossible à atteindre) :

   f) 14, 21 et 30 points. C'est l'exercice 14 du 16 novembre 2011 (voir rubrique B du site www.jeuxmath.ch).

   g) 5, 9 et 11 points.

Solutions

Appelons A, le nombre de scores impossibles à atteindre, et B, le plus grand total impossible à atteindre.

a) Scores impossibles à atteindre : 1, 2, 4, 5, 8 et 11. Alors, A = **<u>6</u>** et B = **<u>11</u>**.

b) Scores impossibles à atteindre : 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, etc. A = **<u>infini</u>** et il n'y **<u>pas de solution pour B</u>**. On remarque que tous les scores pairs peuvent être atteints.

c) Scores impossibles à atteindre : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 19 et 23. Ainsi, A = **<u>12</u>** et B = **<u>23</u>**.

Le tableau suivant présente une manière de chercher tous les scores possibles. Dans la première ligne, on met les multiples de 4 et dans la première colonne les multiples de 9. Quatre lignes vont suffire (comme 4, le plus petit nombre de notre cible). On constate que l'on peut atteindre tous les nombres à partir de 24. D'où B = 23.

	4	8	12	16	20	24	28	32	…	Multiples de 4, à partir de 4
9	13	17	21	25	29	33	37	41	…	(Multiples de 4) + 1, à partir de 9
18	22	26	30	34	38	42	46	50	…	(Multiples de 4) + 2, à partir de 18
27	31	35	39	43	47	51	55	59	…	(Multiples de 4) + 3, à partir de 27

Remarquons que les scores du tableau ci-dessus ne peuvent jamais être identiques. Dès que 4 scores possibles sont consécutifs, le plus grand score impossible est celui qui précède le plus petit des 4 scores consécutifs.

d) Cette fois, commençons par chercher les scores possibles à atteindre : 9, 12, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, etc. Ce sont tous des multiples de 3. Alors, A = **infini** et il n'y **pas de solution pour B**.

e) Faisons un début de tableau comme en c). Le plus grand score impossible à atteindre est celui qui précède d'une unité le plus petit score de la première suite de 7 scores possibles consécutifs. Cette suite est obtenue par les scores allant de 174 à 180 (voir dernière colonne du tableau). Donc, B = **173**. Dans notre tableau, c'est le score 180 qui est essentiel car 180 – 7 = 173.

	7	14	21	28	35	42	…	Multiples de 7, à partir de 7	175
30	37	44	51	58	65	72	…	(Multiples de 7) + 2, à partir de 30	177
60	67	74	81	88	95	102	…	(Multiples de 7) + 4, à partir de 60	179
90	97	104	111	118	125	132	…	(Multiples de 7) + 6, à partir de 90	174
120	127	134	141	148	155	162	…	(Multiples de 7) + 1, à partir de 120	176
150	157	164	171	178	185	…		(Multiples de 7) + 3, à partir de 150	178
180	187	194	201	208	215	…		(Multiples de 7) + 5, à partir de 180	180

Pour trouver A, il faut établir la liste des scores impossibles, ce qui est fastidieux. Heureusement, une formule trouvée dans les annales du 5ème championnat international des jeux mathématiques et logiques (Volume 9, énigme 31, éditions POLE, 1992) va nous être très utile.

Appelons x et y, les points respectifs des deux zones.

Rappel : deux ou plusieurs nombres sont dits premiers entre eux si et seulement si leur plus grand diviseur commun (PGDC) est 1. Les nombres 9 et 12 ne sont pas premiers entre eux car 3 est diviseur de 9 et de 12. Les nombres 7, 9 et 12 sont premiers entre eux car le PGDC (7; 9; 12) est égal à 1.

- Si x et y ne sont pas premiers entre eux comme aux exercices b) et d), les scores impossibles sont infinis. Donc, A = infini, et pas de solution pour B.
- Si x et y sont premiers entre eux comme aux exercices a), c) et e), on a :

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(x-1)(y-1) \text{ et } B = xy - x - y.}$$

N'est-ce pas beau ? Inutile de me remercier, je n'y suis pour rien ☺.

Ainsi, dans notre exercice, A = $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 29$ = **87**.

f) Il est facile de vérifier que les scores engendrés par 14 et 21 ne sont que des multiples de 7, à partir de 14. Cherchons tous les scores possibles engendrés par les multiples de 7 (à partir de 14) et les multiples de 30, à l'aide du tableau suivant. Pour trouver les nombres t de « à partir de t », il suffit de regarder les nombres de la 2ème colonne. Le plus grand score impossible à atteindre est **187** (194 – 7). De 188 à 194, on a la première suite de 7 scores possibles consécutifs.

	14	21	28	35	42	…	Multiples de 7, à partir de 14	189
30	44	51	…				(Multiples de 7) + 2, à partir de 44	191
60	74	81	…				(Multiples de 7) + 4, à partir de 74	193
90	104	111	…				(Multiples de 7) + 6, à partir de 104	188
120	134	141	…				(Multiples de 7) + 1, à partir de 134	190
150	174	171	…				(Multiples de 7) + 3, à partir de 174	192
180	194	201	…				(Multiples de 7) + 5, à partir de 194	194

g) Occupons-nous d'abord des zones 5 et 9. Selon les formules vues en e), on sait qu'il y a 16 nombres impossibles à atteindre $\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\right)$ et que le plus grand score impossible à atteindre est 31 ($5\cdot 9 - 5 - 9$).

Scores impossibles à atteindre par les multiples de 5 et 9 : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 21, 22, 26, 31. Parmi ces scores impossibles, ceux qui sont soulignés sont atteignables à l'aide des multiples de 11. Par exemple, $31 = 4\cdot 5 + 11$, $26 = 3\cdot 5 + 11$. Dans un cas plus complexe, il aurait été intéressant de faire un tableau mettant en relation les scores possibles engendrés par les zones 5 et 9 (5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, etc.) et les multiples de 11.

Le plus grand score impossible à atteindre avec les zones 5, 9 et 11 est **17**.

– Augustin Genoud, août 2014 –