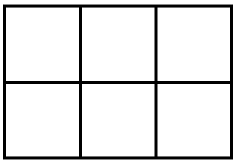
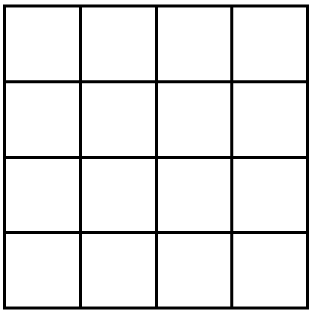
36. Le nombre de carrés * ** ***

Vous trouverez ici une technique très pratique et peu connue permettant de savoir si la relation liant deux ensembles peut être une fonction polynomiale et, si c'est le cas, de la trouver. Toutes les figures suivantes sont faites de carrés juxtaposés.

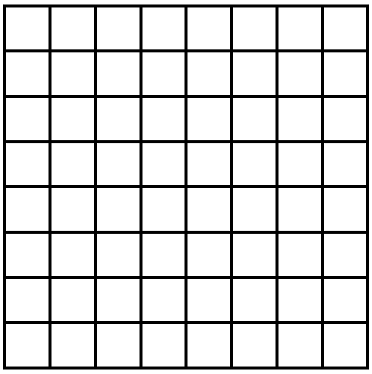
La figure suivante compte 8 carrés. En effet, en plus des 6 petits carrés, il y a le carré formé des 4 petits carrés de gauche et le carré composé des 4 petits carrés de droite.



a) Combien y a-t-il de carrés dans la figure suivante :



b) Un échiquier, espace sur lequel on joue aux échecs, est fait de 64 cases carrées.
Combien y a-t-il de carrés sur cet échiquier ?



c) Supposons que l'on ait un échiquier de 100 cases par 100 cases, donc fait de 10'000 cases carrées. Combien y aurait-il de carrés sur cet échiquier ?

Solutions

a) Dans cette figure, il y a 16 petits carrés + 9 carrés formés de 4 petits carrés + 4 carrés composés de 9 petits carrés + 1 grand carré prenant la figure entière. Il y a dont **<u>30 carrés</u>** en tout.

b) On a vu dans l'exercice précédent qu'un carré de 4 cases par côté comporte 30 carrés, soit 16 + 9 + 4 + 1.

Un carré de 5 cases par côté compte 25 + 16 + 9 + 4 +1 = 55 carrés = $5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$.

Un échiquier de 8 cases par 8 cases compte 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = **<u>204 carrés</u>**.

On aurait aussi pu constater qu'il y a 1 carré de 8 cases de côté, 4 carrés de 7 cases de côté, 9 carrés de 6 cases de côté, 16 carrés de 5 cases de côté, etc.

c) La méthode utilisée dans l'exercice précédent serait ici un peu longue. Il nous faut espérer pouvoir trouver une fonction liant le nombre de cases par côté au nombre total de carrés. On appellera la méthode qui suit, la **méthode des différences**.

Avec ce qui a été vu précédemment, il est facile d'établir le tableau suivant :

Nombre de cases par côté	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre total de carrés	1	5	14	30	55	91	140	204

Voyons maintenant la technique très pratique et peu connue permettant de savoir si la relation liant deux ensembles peut être une fonction polynomiale et, si c'est le cas, de la trouver.

Ci-dessous, faisons ce que l'on va appeler un tableau des différences. Les lignes a et b sont reprises d'une partie du tableau précédent. A partir de la ligne c, chaque terme calculé est la différence entre les deux termes situés juste au-dessus de lui, dans le sens « droite moins gauche ». Ainsi, dans la ligne des premières différences, on obtient 4 (5 – 1), 9 (14 – 5), 16, 25, etc. On arrête le procédé lorsqu'une ligne est composée uniquement de nombres identiques. Appelons ce nombre M. Ici, M = 2. Normalement, on devrait s'assurer que si notre tableau était plus grand sur sa droite, on trouverait toujours des 2 sur la ligne des nombres identiques. On pourrait le faire en ajoutant les couples (7, 140) et (8, 204) dans les lignes a et b.

a	Nombre de cases	1		2		3		4		5		6
b	Suite trouvée	1 (4)		5		14		30		55		91
c	1ères différences		4 (3)		9		16		25		36	
d	2èmes différences			5 (2)		7		9		11		
e	3èmes différences				2 (1)		2		2			

Le fait d'arriver à une ligne composée uniquement de nombres identiques nous assure qu'il existe une fonction polynomiale répondant aux conditions du tableau.

Si M est obtenu en 1 étape, la fonction est de la forme $ax + b$.
Si M est obtenu en 2 étapes, la fonction sera de la forme $ax^2 + bx + c$.
Si M est obtenu en 3 étapes, la fonction est de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Et ainsi de suite.

Dans notre cas, M a été obtenu en 3 étapes. Notre fonction est donc de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. D'autre part, on sait que $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, $f(3) = 14$ et $f(4) = 30$. D'où on peut tirer 4 équations à 4 inconnues :

$f(1) = a + b + c + d = 1$.

$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 5$.

$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 14$.

$f(4) = 64a + 16b + 4c + d = 30$.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un tel système. Ici, nous allons en utiliser une très originale. D'abord, on refait le tableau des différences avec notre fonction. Pour une question de place, on a enlevé la colonne des en-têtes. Dans la ligne b, on met successivement f (1), f (2), f (3) et f (4). Nous devons compléter autant de cases dans la ligne b qu'il y a d'inconnues dans la fonction cherchée (ici, 4 inconnues : a, b, c et d).

a	1		2		3		4
b	a+b+c+d (4)		8a+4b+2c+d		27a+9b +3c+d		64a+16b+4c+d
c		7a+3b+c (3)		19a+5b+c		37a+7b+c	
d			12a+2b (2)		18a+2b		
e				6a (1)			

En comparant les deux tableaux, on trouve aisément les valeurs des inconnues :

Des (1), on a $6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

Des (2), on a 12a + 2b = 5 $\Rightarrow$ 4 + 2b = 5 $\Rightarrow$ b = $\frac{1}{2}$.

Des (3), on a 7a + 3b + c = 4 $\Rightarrow \frac{7}{3}+\frac{3}{2}+c=4 \Rightarrow$ c = $\frac{1}{6}$.

Des (4), on a a + b + c + d = 1 $\Rightarrow$ d = 0.

Ce qui nous donne la fonction $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$. Un échiquier de 100 cases de côté a **338'350 carrés** !

☛ Un petit exercice supplémentaire n'est peut-être pas inutile. Imaginons la relation suivante :

A	0	1	2	3	4	5
B	1	– 2	– 1	4	13	26

On aimerait connaître une fonction liant A à B.

Etablissons le tableau des différences :

a	A	0		1		2		3		4		5
b	B	1		– 2		– 1		4		13		26
c	Premières différences		– 3		1		5		9		13	
d	Deuxièmes différences			4		4		4		4		

Il existe une fonction polynomiale liant les deux ensembles car nous aboutissons à M = 4 qui apparaît aux deuxièmes différences. Alors la fonction recherchée est du type $ax^2 + bx + c$, avec 3 inconnues a, b et c. D'autre part, on sait que :

f (0) = c = 1, f (1) = a+b+c = – 2 et f (2) = 4a+2b+c = – 1. Ce système de 3 équations à 3 inconnues est facile à résoudre.

Mais cherchons la valeur des inconnues avec la méthode des différences :

a	A	0		1		2
b	B	c		a+b+c		4a+2b+c
c	Premières différences		a+b		3a+b	
d	Deuxièmes différences			2a		

2a = 4 $\Rightarrow$ a = 2.
a+b = – 3 $\Rightarrow$ b = – 5.
c = 1.

La fonction cherchée est $2x^2 - 5x + 2$.

☛ Dernière remarque… Les éléments de A (1, 2, 3, 4 et 5) ont pour image respective les éléments (1, 2, 4, 8 et 16). La fonction liant A à B peut être 2^{x-1} ou $\frac{1}{24}\left(x^4-6x^3-23x^2-18x+24\right)$. Ce petit exemple montre qu'il peut y avoir plusieurs fonctions liant deux ensembles.

Les éléments de A (1, 2, 3, 4, 5 et 6) ont pour image respective les éléments (1, 2, 4, 8, 16 et 32). La fonction liant A à B est 2^{x-1}.

Les éléments de A (1, 2, 3, 4, 5 et 6) ont pour image respective les éléments (1, 2, 4, 8, 16 et 31). La fonction liant A à B est $\frac{1}{24}\left(x^4-6x^3-23x^2-18x+24\right)$.

– Augustin Genoud, juillet 2014 –