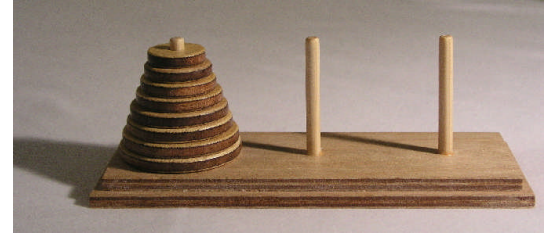


35. Les tours de Hanoï * ** ***

(Ce problème a été inventé par Edouard Lucas au 19e siècle.)

Demandez à un menuisier de vous fabriquer l'objet ci-dessus fait d'une planchette, de trois tiges et de quelques disques, tous de différentes grandeurs. Au départ, les disques doivent être enfilés sur une seule tige, du plus grand au plus petit. Le jeu consiste ensuite à déplacer tous les disques sur une des deux autres tiges, en respectant les deux règles suivantes :



1. On ne peut déplacer qu'un disque à la fois.
2. On ne peut poser un disque que sur un disque plus grand ou sur un emplacement vide.

Chaque déplacement d'un disque constitue un coup. Le but est de déplacer tous les disques en un minimum de coups.

- a) Au départ, il y a 3 disques sur une tige. Combien faut-il de coups, au minimum, pour les déplacer sur une autre tige ?
- b) Au départ, il y a 5 disques sur une tige. Combien faut-il de coups, au minimum, pour les déplacer sur une autre tige ?
- c) Au départ, il y a 8 disques sur une tige. Combien faut-il de coups, au minimum, pour les déplacer sur une autre tige ?
- d) Trouvez une technique qui permet de déplacer rapidement les disques en un minimum de coups.

Solutions

- a) Il faut **7 coups**.
- b) Il faut **31 coups**.
- c) Il faut **255 coups**. La relation entre le nombre de pièces au départ (n) et le nombre de coups (p) est $p = 2^n - 1$. Ainsi, pour 8 pièces, on a $2^8 - 1 = 255$ coups.
- d) Soit A, B et C, les tiges, de gauche à droite. Les disques sont notés 1, 2, 3, 4 etc. du plus petit au plus grand.
 1. Le disque 1, le plus petit, doit être déplacé tous les deux coups et uniquement tous les deux coups. Si, au départ, les disques sont sur A, il doit aller successivement sur B, puis sur C, puis sur A, puis sur B, puis sur C, puis sur A, etc.
 2. En alternance avec le disque 1, vous constaterez qu'il n'y a qu'un seul disque qui peut être déplacé. Il faudra le mettre sur la seule tige disponible.

Prenons l'exemple de 4 disques placés sur la tige A. Le disque 1 va sur B. Le disque 2 ne peut aller que sur C. Il faut ensuite déplacer le disque 1 (règle numéro 1) sur C. Le disque 3 (le seul qui peut être déplacé car le 1 ne doit changer de place que tous les deux coups) ne peut aller que sur B. Le disque 1 doit aller sur A (règle numéro 1). Le disque 2 doit aller sur B. Le disque 1 doit aller sur B. Le disque 4 doit aller sur C. Le disque 1 doit aller sur C. Le disque 2 doit aller sur A. Le disque 1 doit aller sur A. Le disque 3 doit aller sur C. Le disque 1 doit aller sur B. Le disque 2 doit aller sur C et enfin le disque 1 doit aller sur C. Il a fallu 15 coups pour déplacer les 4 disques, ce qui est bien juste.