33. Tour de magie dérivé de Fibonacci

Le numéro 2 de cette rubrique nous a permis de découvrir les suites de Fibonacci. Rappelons comment est construite une telle suite. Au départ, deux nombres sont donnés. Ensuite, chacun des nombres suivants est la somme des deux nombres qui le précèdent directement.

Nous avions trouvé au numéro 2 la suite suivante : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, etc.

Les deux premiers nombres (1 et 1) ont engendré 2 (1 + 1), puis 3 (1 + 2), puis 5 (2 + 3), puis 8 (3 + 5), etc. Cette suite peut être prolongée à l'infini.

a) Déterminez les 10 premiers nombres de la suite de Fibonacci dont les deux premiers sont 2 et 5. Calculez ensuite la somme de ces 10 nombres.
b) Déterminez les 10 premiers nombres de la suite de Fibonacci dont les deux premiers sont 3 et 8. Calculez ensuite la somme de ces 10 nombres.
c) La somme des 10 premiers nombres d'une suite de Fibonacci est le produit du 7ème nombre par un nombre que l'on va appeler x. Quel est ce nombre x ?
d) Ce nombre x est constant quelle que soit la suite de Fibonacci. Donnez-en la preuve.
e) Le fait de savoir que le produit du 7ème nombre de la suite par x donne la somme des 10 premiers nombres peut conduire à un tour de magie épatant. Imaginez ce tour.

Solutions

a) Voici les 10 premiers nombres : 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212. Leur somme donne 550.
b) Voici les 10 premiers nombres : 3, 8, 11, 19, 30, 49, 79, 128, 207, 335. Leur somme donne 869.
c) $x = 11$. En effet, $50 \cdot 11 = 550$ et $79 \cdot 11 = 869$.
d) Soit a et b, les deux premiers nombres. Le 3ème est $a + b$, le 4ème est $a + 2b$, le 5ème est $2a + 3b$, …, le 7ème est $5a + 8b$, etc. La somme des 10 premiers nombres donne $55a + 88b = 11(5a + 8b)$. Donc, x est bien égal à 11.
e) Voici une manière de réaliser ce tour de magie. On demande à quelqu'un d'écrire deux nombres. Il vaut mieux que ce soient des entiers positifs pas trop grands (inférieurs à 10, par exemple) pour éviter de longs calculs, en précisant que l'on ne souhaite pas connaître les nombres choisis, ni les autres écrits par la suite. On demande à cette personne d'écrire un 3ème nombre comme étant la somme des deux nombres choisis. Puis un 4ème, 5ème, etc. jusqu'au 10ème en expliquant comment les construire. Lorsque les 10 nombres ont été écrits, on demande d'en faire la somme. Il nous faut ensuite connaître le 7ème nombre de la suite que l'on va multiplier par 11 pour trouver la somme que l'on énonce alors fièrement. Une astuce permet de brouiller les pistes. On demande par exemple de connaître le 4ème nombre de la liste ainsi que le 7ème. Le 4ème ne nous servira à rien sauf justement à brouiller les pistes.

   Remarque : la multiplication par 11 peut être réalisée facilement oralement. Voici une possibilité :

   $a \cdot 11 = a \cdot 10 + a$. Ainsi, $79 \cdot 11 = 79 \cdot 10 + 79 = 790 + 79 = 869$.

– Augustin Genoud, juin 2014 –