117. Des nombres amusants ** * *****

a) Les nombres préférés de Sabrina sont composés de 6 chiffres : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Pour chacun d'eux, le nombre formé par les deux premiers chiffres est divisible par 2, celui formé par les trois premiers chiffres est divisible par 3, celui formé par les quatre premiers chiffres est divisible par 4, celui formé par les cinq premiers chiffres est divisible par 5 et celui formé par tous les chiffres est divisible par 6.

   Quel est le plus grand nombre préféré de Sabrina ?

b) Les nombres préférés de Thérèse sont composés de 9 chiffres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Pour chacun d'eux, le nombre formé par les deux premiers chiffres est divisible par 2, celui formé par les trois premiers chiffres est divisible par 3, celui formé par les quatre premiers chiffres est divisible par 4, et ainsi de suite, jusqu'au nombre formé par tous les chiffres qui est divisible par 9.

   Quels sont les nombres préférés de Thérèse ?

Solutions

a) Appelons abcdef le nombre cherché. Il est évident que e = 5 et que b, d et f sont pairs. Alors, a et c sont impairs (1 ou 3). Comme on cherche le plus grand nombre, essayons a = 3 et c = 1.

   On a donc pour l'instant le nombre 3b1d5f. Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3. Alors, b est forcément égal à 2. Seuls 4 et 6 sont encore disponibles. Un nombre est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres sont divisibles par 4. Dans ce cas, d vaut nécessairement 6. Il ne reste plus que 4 pour f.

   Le nombre préféré de Sabrina est **<u>321'654</u>**.

b) Appelons abcdefghi, le nombre cherché. On sait que e = 5, que b, d, f et h sont pairs, alors a, c, g et i sont impairs. Comme la somme des nombres de 1 à 9 est égal à 45, alors i peut valoir n'importe quel chiffre impair.

   Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Donc cd doit être un multiple de 4.

   Un nombre est divisible par 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8. Donc, fgh doit être un multiple de 8.

   Comme abcdef est un multiple de 6, alors il est aussi un multiple de 3. Etant donné que abc est un multiple de 3, alors abc000 est aussi un multiple de 3. abcdef − abc000 = def. Comme abcdef et abc000 sont des multiples de 3, alors def est aussi un multiple de 3. Par un raisonnement analogue, on peut démontrer que ghi est également un multiple de 3.

   Comme c est impair, alors cd = 12, 16, 32, 36, 72, 76, 92 ou 96, soit 8 cas possibles, avec d = 2 ou 6.

   Cherchons les cas possibles de fgh (multiples de 8). Comme g est impair, alors h ne peut pas être égal à 4 ni à 8. Alors, fgh = 216, 296, 416, 432, 472, 496, 632, 672, 816, 832, 872 ou 896, soit 12 cas possibles, avec h = 2 ou 6.

   On sait maintenant que d et h peuvent respectivement prendre les valeurs 2 et 6, ou 6 et 2.

   <u>Premier cas</u> : supposons d = 2 et h = 6. Alors, fgh = 416, 496, 816 ou 896. Alors, def = 254 ou 258. Comme 254 n'est pas un multiple de 3, seul 258 reste possible. Donc, defgh = 25816 ou 25896. La seule valeur restante de b est 4. On obtient a4c25816 ou a4c25896 pour les huit premiers chiffres des nombres cherchés. Pour a4c25816, il reste les chiffres 3, 7 et 9 pour a et c. Aucun des six cas possibles de a4c n'est un multiple de 3. Pour a4c25896, il reste les chiffres 1, 3 et 7 pour a et c. Seuls 147 et 741 peuvent convenir pour a4c. Cependant, 1472589 et 7412589 ne sont pas divisibles par 7. Aucune solution de peut provenir de ce premier cas.

Second cas : supposons d = 6 et h = 2. Alors, fgh = 432, 472, 832 ou 872. Alors, def = 654 ou 658. Comme 658 n'est pas un multiple de 3, seul 654 reste possible. Donc, defgh = 65432 ou 65472. La seule valeur restante de b est 8. On obtient a8c65432 ou a8c65472 pour les huit premiers chiffres des nombres cherchés. Pour a8c65432, il reste les chiffres 1, 7 et 9 pour a et c. Seuls 189, 789, 981 et 987 peuvent convenir pour a8c. Cependant aucun des nombres formés par les 7 premiers chiffres n'est divisible par 7. Pour a8c65472, il reste les chiffres 1, 3 et 9 pour a et c. Seuls 183, 189, 381 et 981 peuvent convenir pour a8c. Seul 3816547 est divisible par 7.

Le nombre préféré de Thérèse est unique, il vaut **381'654'729**.

– Augustin Genoud, décembre 2020 –