**114. Le jeu de Marienbad ! ****

Pascale et Sophie jouent avec quatre tas d'allumettes comptant respectivement 1, 3, 5 et 7 allumettes. A tour de rôle, chacune doit retirer dans un des tas autant d'allumettes qu'elle souhaite mais au minimum 1 allumette. La joueuse qui prend la dernière allumette perd.

Pascale souhaite jouer la première.

a) Pascale a-t-elle raison de vouloir jouer la première ?

Pour être sûre de gagner, comment Sophie doit-elle jouer son premier coup si Pascale a commencé par retirer

b) le tas complet de 7 allumettes ?

c) 2 allumettes dans le tas de 5 allumettes ?

d) le tas de 1 seule allumette ?

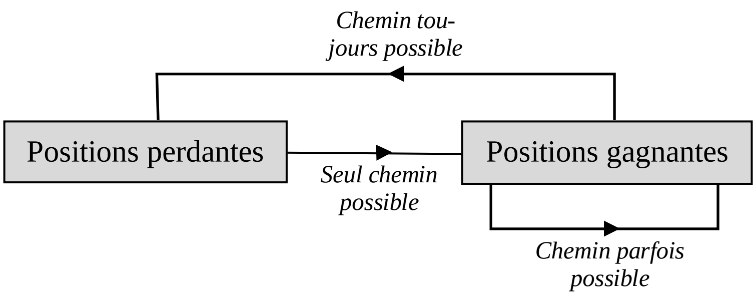
Ce jeu fait partie des jeux de Nim, des jeux qui se jouent à deux et qui aboutissent toujours à une fin. La version *jeu de Marienbad* fait référence à une scène du film d'Alain Resnais « L'année dernière à Marienbad » dans laquelle deux personnages jouent avec les mêmes tas d'allumettes que dans notre énigme.

**Solutions**

Les jeux de Nim ne se limitent pas aux jeux dits *Nim à tas*. Ils peuvent être très complexes. Quelques notions de base sont indispensables pour ceux qui les découvrent pour la première fois.

Par convention, lorsque l'on parle de position (ou situation), c'est celle devant laquelle se trouve un joueur à qui c'est au tour de jouer. U**ne position est dite perdante** si celui qui se trouve devant cette position (ou situation) ne peut que perdre si son adversaire joue parfaitement. De la même manière, **une position est dite gagnante** si celui qui se trouve devant cette position peut gagner s'il joue parfaitement.

Voici de manière schématique, le principe de base des jeux de Nim, valable pour toutes les versions :




Comme l'indique le schéma, les positions perdantes ne peuvent être suivies que de positions gagnantes. Autrement dit, une position qui ne conduit qu'à des positions gagnantes est perdante et une position qui peut conduire à une position perdante est gagnante.

Le joueur se trouvant dans une position gagnante est sûr de gagner s'il joue correctement, ce qui revient à envoyer son adversaire dans une position perdante. Toute la difficulté des jeux de Nim est de trouver les positions perdantes.

La recherche de toutes les positions perdantes du jeu de Marienbad est ardue et chronophage si on ne connaît pas les moyens existants pour reconnaître l'état d'une position des jeux de Nim à plusieurs tas.

Notre jeu est composé de quatre tas comportant 1, 3, 5 et 7 allumettes. Pour simplifier l'écriture, nous symboliserons ces quatre tas ainsi : (1, 3, 5, 7). Bien entendu, (1, 3, 5, 7) = (5, 1, 7, 3) = (3, 5, 1, 7), etc. On fera de même pour chaque situation du jeu.

Voici un moyen de reconnaître l'état de toute position des jeux de Nim à plusieurs tas :

Tous les tas d'allumettes doivent être divisés en des tas comprenant chacun un nombre d'allumettes correspondant à des puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, etc.), lesquelles doivent être les plus grandes possible. Par exemple, un tas de 3 allumettes doit être remplacé par deux tas comprenant respectivement 2 allumettes et 1 allumette ; un tas de 7 allumettes doit être remplacé par trois tas comprenant respectivement 4 allumettes, 2 allumettes et 1 allumette.

*La position est perdante si et seulement si les nouveaux tas peuvent être associés par paires.*

Prenons trois exemples :

| Tas originaux | Nouveaux tas | |
|---|---|---|
| I<br>II<br>III | I<br>II<br>II I | La position est perdante car tous les nouveaux tas peuvent être associés par paires. En effet, il y a une paire de 2 allumettes et une paire de 1 allumette. |
| I<br>II<br>II<br>III<br>IIII | I<br>II<br>II<br>II I<br>IIII | La positon est gagnante car il est impossible d'associer tous les nouveaux cas par paires. Il y a une paire de 2 allumettes et une paire de 1 allumette, mais il reste un tas de 2 allumettes et un tas de 4 allumettes. Attention, il est interdit de diviser le tas de 4 allumettes en deux tas de 2 allumettes (les puissances de 2 doivent être les plus grandes possible). |
| I<br>III<br>IIIII<br>IIIIIII | I<br>II I<br>IIII I<br>IIII II I | La positon est perdante car tous les nouveaux tas peuvent être associés par paires. Il y a une paire de 4 allumettes, une paire de 2 allumettes et deux paires de 1 allumette. |

a) La position de départ est perdante selon le dernier exemple vu précédemment. **<u>Pascale n'a pas raison de vouloir jouer la première</u>**. Si Sophie joue correctement, Pascale perdra.

b) Comme Pascale retire complètement le tas de 7 allumettes, il reste la situation suivante : (1, 3, 5).

| Tas originaux | Nouveaux tas | |
|---|---|---|
| I<br>III<br>IIIII | II<br>II I<br>IIII I | La seule possibilité d'associer les nouveaux tas par paires est de retirer 4 allumettes dans le tas de 5 allumettes. La situation (1, 2, 3) est perdante. C'est la position offerte par Sophie à Pascale. |

**<u>Sophie doit retirer 4 allumettes dans le tas de 5 allumettes</u>**.

c) Situation restante : (1, 3, 3, 7).

| Tas originaux | Nouveaux tas | |
|---|---|---|
| I<br>III<br>III<br>IIIIIII | I<br>II I<br>II I<br>IIII II I | Dans les nouveaux cas, on trouve une paire de 2 allumettes et deux paires de 1 seule allumette. En ôtant 6 allumettes dans le tas de 7 allumettes, Sophie met Pascale dans une position perdante (1, 1, 3, 3). |

**<u>Sophie doit retirer 6 allumettes dans le tas de 7 allumettes</u>**.

d) Situation restante : (3, 5, 7).

| Tas ori-ginaux | Nouveaux tas | |
|---|---|---|
| III<br>IIIII<br>IIIIIII | II I<br>IIII I<br>IIII II I | Sophie peut mettre Pascale dans une position perdante en enlevant 1 allumette dans le tas de 3 allumettes ou en enlevant 1 allumette dans le tas de 5 allumettes ou en enlevant 1 allumette dans le tas de 7 allumettes. |

**Sophie doit enlever 1 allumette dans le tas de 3 allumettes** ou **enlever 1 allumette dans le tas de 5 allumettes** ou **enlever 1 allumette dans le tas de 7 allumettes**.

Au lieu de dessiner les allumettes, il est souvent pratique de noter une position de la manière suivante :

$$3 \rightarrow 2 - 1$$
$$5 \rightarrow 4 - 1$$
$$7 \rightarrow 4 - 2 - 1$$

Voici un autre moyen de reconnaître l'état d'une position :

Transformer le nombre d'allumettes de chaque tas en base 2, puis additionner les nombres obtenus.

*La position est perdante si et seulement si la somme des chiffres figurant dans chaque colonne est paire.*

Pour la petite histoire, j'ai trouvé cette explication dans le numéro 124 de la revue « Science et vie », un « hors-série » que je possède encore, paru en septembre 1978.

Dans le tableau suivant, on trouve quelques équivalences entre la base 10 et la base 2 :

| Base 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base 2 | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 |

Supposons que l'on veuille étudier l'état de cinq tas d'allumettes contenant respectivement 8, 10, 13, 24 et 29 allumettes. A gauche des égalités ci-dessous, on écrit les nombres d'allumettes par tas (en base 10) et à droite, les nombres équivalents, en base 2, puis on fait la somme (S) des chiffres de la partie de droite des égalités.

$$\begin{array}{rcccccc}
8 & = & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
10 & = & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
13 & = & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
24 & = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
29 & = & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
S & = & 2 & 5 & 2 & 1 & 2
\end{array}$$

Comme la somme des chiffres figurant dans chaque colonne ne correspond pas à un nombre pair, alors la position (8, 10, 13, 24 et 29) est gagnante. Celui qui doit jouer dans cette position est certain de gagner s'il ne commet pas d'erreurs au cours du jeu.

Si celui qui doit jouer enlève 6 allumettes dans le tas de 8 allumettes, il va transmettre une position perdante à son adversaire, comme on peut le voir ci-après (les sommes de chaque colonne sont paires).

$$\begin{array}{rcccccc}
2 & = & & & & 1 & 0 \\
10 & = & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
13 & = & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
24 & = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
29 & = & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
S & = & 2 & 4 & 2 & 2 & 2
\end{array}$$

Celui qui doit jouer aurait pu enlever le tas complet de 10 allumettes pour transmettre une position perdante à son adversaire.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | = | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | = | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | = | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 24 | = | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 29 | = | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| S | = | 2 | 4 | 2 | 0 | 2 |

**Remarques**

1) La règle du jeu indiquait que le « premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu », ce qui revient à dire que celui qui enlève la dernière allumette gagne (c'est la version dite classique du jeu de Nim à plusieurs tas). Dans cette version, les deux moyens de reconnaître les positions perdantes sont valables jusqu'à la fin du jeu.

   Mais que se passe-t-il si la règle énonce que celui qui enlève la dernière allumette perd (version appelée *misère*) ? Dans ce cas, les moyens vus précédemment de détecter les positions perdantes restent valables jusqu'au moment où il n'y a plus qu'un seul tas qui contient plusieurs allumettes. A partir de là, seules les positions contenant un nombre impair d'allumettes esseulées sont perdantes. Par exemple, la position (3, 1, 1) doit être suivie de (1, 1) dans la version classique et de (1, 1, 1) dans la version *misère*.

2) Voici toutes les positions perdantes du jeu de Marienbad (version classique) :
   (n, n), (n, n, m, m), (1, 3, 5, 7), (1, 2, 4, 7), (1, 2, 5, 6), (1, 3, 4, 6), (2, 4, 6), (3, 5, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (1, 4, 5) et (1, 2, 3).