108. Les cartes de Vera ! * ** ***

a) Vera possède 4 cartes numérotés de 1 à 4, empilées les unes sur les autres, la n° 1 dessus, suivie de la n° 2, de la n° 3 et de la n° 4.
   Elle prend la carte placée au-dessus du paquet (la n° 1), la place en dernière position et jette la carte suivante (la n° 2).
   Elle prend ensuite la carte placée au-dessus du paquet (la n° 3), la place en dernière position et jette la carte suivante.
   Elle continue toujours ainsi en plaçant la carte au-dessus du paquet en dernière position et en éliminant la carte suivante, jusqu'à ce qu'elle n'ait plus qu'une seule carte en main.
   Quel sera le numéro de la dernière carte dans sa main ?
b) Vera fait la même chose, mais avec 10 cartes numérotées dans un ordre croissant, la n° 1 étant la première de la pile.
   Quel sera le numéro de la dernière carte dans sa main ?
c) Vera fait la même chose, mais avec 2000 cartes numérotées dans un ordre croissant, la n° 1 étant la première de la pile.
   Quel sera le numéro de la dernière carte dans sa main ?

Solutions

a) Dans le tableau suivant, on trouve dans la ligne « a » la pile de cartes du départ. Une fois la carte 1 placée en dernière position et la carte 2 éliminée, on a la pile de la ligne « b ». Ensuite, la carte 3 est mise en dernière position et la carte 4 éliminée. On a alors la pile de la ligne « c ». La carte 1 est placée en dernière position et la 3 est jetée. La dernière carte en main de Vera est la **numéro 1**.

a	1	2	3	4
b	3	4	1	
c	1	3		
d	1			

b) Les piles successives sont mises dans les lignes du tableau ci-dessous. La dernière carte en main de Vera est la **numéro 5**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	1	
5	6	7	8	9	10	1	3		
7	8	9	10	1	3	5			
9	10	1	3	5	7				
1	3	5	7	9					
5	7	9	1						
9	1	5							
5	9								
5									

c) Ici, il devient difficile de faire comme dans les cas précédents.

Voyons ce qui se passe lorsque le nombre total de cartes jouées par Véra augmente progressivement.

Nombre total de cartes	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Numéro de la carte restante	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3

On constate que la carte restante est 1 chaque fois que le nombre total de cartes est une puissance de 2.

Pour un nombre total de cartes compris entre deux puissances de 2, la suite est évidente : 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. Soit n, la plus grande puissance de 2 inférieur au nombre total de cartes x. La fonction permettant de trouver le numéro de la carte restante à partir de n et x est facile à découvrir.

Nombre total de cartes	n	n + 1	n + 2	n + 3	…	x
Numéro de la carte restante	1	3	5	7	…	$(x - n) \cdot 2 + 1$

La plus grande puissance de 2 inférieure à 2000 est 1024.

Numéro cherché $= (2000 - 1024) \cdot 2 + 1$ = **1953**.