104. L’escargot ! * ******

En 1982, Martin Gardner (1914 – 2010), considéré comme l’un des plus grands auteurs américains de divertissements mathématiques, publie "Aha : Gotcha", un recueil de paradoxes mathématiques allant des antiques paradoxes de Zénon jusqu'à celui de l'hôtel de Hilbert. Parmi eux figure le paradoxe de la corde élastique.

Cette histoire met en scène Léo, un escargot particulièrement obstiné qui voue sa vie à atteindre l'extrémité d'un élastique sur lequel il progresse.

Cet élastique mesure 100 m et Léo avance à la vitesse de 1 m/h. Si rien ne s'oppose à lui, il lui faut 100 heures, soit un peu plus de 4 jours pour atteindre son but.

Hélas pour le pauvre Léo, à la fin de chaque heure, dans un temps que l’on considère comme nul, un géant infatigable tire sur cet élastique infiniment extensible de manière qu’il soit rallongé de 100 mètres, de façon homogène. Cela signifie que lorsque le géant tire sur l’élastique, la distance restante à parcourir pour Léo augmente, mais la distance déjà parcourue, aussi.

Notre courageux escargot est-il condamné à errer sur cette corde pour l'éternité, ou bien pourra-t-il accomplir sa mission et, si oui, après combien de temps atteindra-t-il son but ?

Solutions

Fixons l’une des extrémités de l’élastique en un point O.

OA = Longueur de l’élastique.

OB = Distance totale parcourue par l’escargot.

Observons heure après heure le périple de notre gastéropode, avant l’allongement de l’élastique (lignes AV) et après l’allongement de l’élastique (lignes AP).

			OA (m)	OB (m)	OB/OA (en pourcents)
	0 heure		100	0	0
a	1ère heure	AV	100	1	1
b		AP	200	2	1
c	2ème heure	AV	200	3	$1{,}5 = 1+\frac{1}{2}$
d		AP	300	4,5	1,5
	3ème heure	AV	300	5,5	$1{,}8\overline{3} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
		AP	400	$7{,}\overline{3}$	$1{,}8\overline{3}$
	4ème heure	AV	400	$8{,}\overline{3}$	$2{,}08\overline{3} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
		AP	500	$10{,}41\overline{6}$	$2{,}08\overline{3}$
	….	…	…	…	…
	Nième heure	AV	100n	100n	$100 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}$

Ligne a : l'escargot a parcouru 1 mètre, ce qui correspond à 1 % de la longueur de l'élastique.

Ligne b : sous l'effet de l'allongement de l'élastique par le géant, l'escargot gagne 1 mètre et aura donc parcouru 2 mètres en tout, ce qui correspond à 1 % de la longueur de l'élastique qui mesure maintenant 200 m.

Ligne c : l'escargot avance d'un mètre, il se trouve à 3 m de son point de départ, ce qui correspond à 1,5 % de la longueur de l'élastique.

Ligne d : sous l'effet de l'allongement de l'élastique par le géant, l'escargot gagne 1,5 mètre et aura donc parcouru 4,5 mètres en tout, ce qui correspond à 1,5 % de la longueur de l'élastique qui mesure maintenant 300 m.

A la fin de chaque heure, le rapport OB/OA est identique avant et après l'allongement de l'élastique. C'est normal car l'allongement de l'élastique se fait de manière homogène. Cependant, ce rapport augmente tout gentiment au fil des heures.

Le but est de parcourir le 100 % du trajet total. Ce but sera réalisé lorsque le nombre de la dernière colonne de la dernière ligne du tableau correspondra à 100. On obtient alors l'équation suivante : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}=100$. Les spécialistes en mathématiques savent que la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}$ diverge, ce qui signifie que la somme peut atteindre des valeurs aussi grandes que voulues. Ainsi, on peut conclure que **Léo pourra bien atteindre l'extrémité de l'élastique**.

Un calcul sur ordinateur montre que n est un nombre de 44 chiffres. Notre escargot atteindrait son but en **environ 120 milliards de milliards de milliards de fois l'âge de l'Univers** !

– Augustin Genoud, novembre 2019 –