103. Les photos * ** ***

Un certain nombre de personnes doivent s'aligner les unes à côté des autres dans le but qu'on les prenne en photos. Combien y a-t-il de possibilités différentes de se placer ?

a) Si 3 personnes doivent être sur la photo ?
b) Si 5 personnes doivent être sur la photo ?
c) Si 9 personnes doivent être sur la photo ?
d) Si n personnes doivent être sur la photo ?

Solutions

Soit A, B, C, D, etc. les personnes.

a) **<u>6 possibilités</u>** : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA.

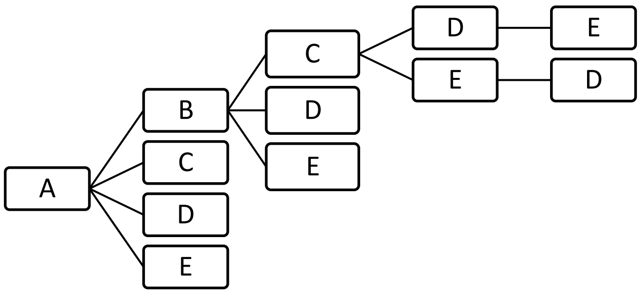
b) **<u>120 possibilités</u>**. Un diagramme en arbre est assez pratique pour dénombrer les possibilités. Ci-dessous, seules deux branches sont complètes : ABCDE et ABCED.

Il y aura également 2 branches à partir de ABD et 2 banches à partir de ABE, soit 6 branches en tout à partir de AB.

6 banches partiront de AC, 6 branches de AD et 6 branches de AE. On décompte donc 24 branches ayant A pour origine.

On peut faire de même avec chacune des lettres B, C, D et E mises à l'origine d'une branche.

On obtient alors **<u>120 possibilités</u>** ($5 \cdot 24$).



c) **<u>362'880 possibilités</u>**.

Comme souvent, une recherche systématique et progressive peut nous aider grandement.

Nombre de personnes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
Nombre de possibilités	1	2	6	24	120	720	5040	40'320	362'880	…

La suite correspondant aux nombres de possibilités peut être construite pas à pas : $2 = 1 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$; $24 = 6 \cdot 4$; $120 = 24 \cdot 5$; $720 = 120 \cdot 6$; $5040 = 720 \cdot 7$; $40'320 = 5040 \cdot 8$; $362'880 = 40'320 \cdot 9$.

d) Pour n personnes, le nombre de possibilités est **<u>n !</u>**

En mathématiques, la factorielle d'un entier naturel n s'écrit n ! et est le résultat du produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n. Exemple : la factorielle de 9 s'écrit 9 ! et vaut 362'880 car $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362'880$.

Par définition, $0! = 1$.

Remarque : la limite de la somme des inverses des factorielles des nombres naturels consécutifs est égale au nombre e appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Ce nombre a été défini à la fin du 17ème siècle et a de nombreuses applications en mathématiques.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + ... = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + ... \cong 2{,}718281828459.$$

Léonhard Euler (1707 - 1783) est un mathématicien et physicien suisse.

Johan Néper (ou Napier) (1550 - 1617) est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais.