

100. Le jeu télévisé ! * ** *** **** *****

Dans un jeu télévisé, l'animateur dispose d'une boîte ronde divisée en un certain nombre de compartiments identiques. Tout joueur, une fois les yeux bandés, sait qu'un robot va mettre un billet de 100 euros dans chacun des compartiments. Pour gagner, il faut que certaines conditions soient remplies. Si c'est le cas, l'animateur annonce « gagné », sinon, il annonce « raté ».

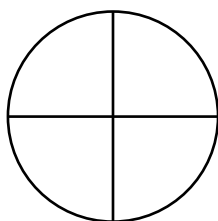
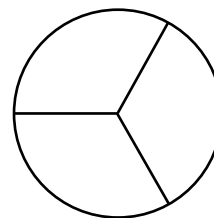
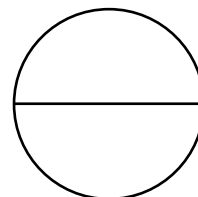
A chaque « raté », le joueur retourne autant de billets qu'il souhaite, sans les changer de compartiment, et l'animateur fait pivoter la boîte de manière aléatoire, avant de dire « raté » ou « gagné ». Et le jeu continue toujours ainsi.

Chaque retournement de billets constitue un essai et chaque essai fait diminuer le montant pouvant être gagné de 10 euros.

Dans chacun des cas ci-dessous, quel montant le joueur pourra-t-il gagner, dans le pire des cas, en jouant avec la meilleure stratégie possible ?

Rappelons que les billets ont un côté recto différent du côté verso.

- a) Le 15 juillet, c'est à Anna de jouer. Elle voit que la boîte contient deux compartiments comme sur le croquis ci-contre et l'animateur lui apprend que pour gagner, les deux billets ne devront pas être du même côté.
- b) Le 16 juillet, c'est à Benoît de jouer. Il constate que la boîte renferme deux compartiments comme dans le cas a) et l'animateur lui indique que pour gagner, les deux billets devront être visibles du côté verso.
- c) Le 17 juillet, c'est à Claudia de jouer. Elle remarque que la boîte est divisée en trois compartiments comme sur le croquis ci-contre et l'animateur lui apprend que pour gagner, les trois billets devront être visibles du côté recto.
- d) Le 18 juillet, c'est à Denis de jouer. Il découvre que la boîte est faite de quatre compartiments comme sur le croquis ci-dessous et l'animateur lui indique que pour gagner, les quatre billets devront être visibles du côté recto.



Solutions

Appelons A, le côté recto et B, le côté verso.

- a) Si Anna ne gagne pas au départ, elle sait qu'elle a affaire à deux cas possibles : AA et BB. Alors, il lui suffit de retourner un seul billet pour être sûre de gagner.

Dans le pire des cas, elle gagne **190 euros** ($200 - 10$).

- b) Si Benoît ne gagne pas au départ, il sait qu'il a affaire à deux cas possibles : AA et AB.

Au premier essai, il retourne deux billets et il obtient BB ou BA. S'il ne gagne pas, il sait qu'il a affaire au cas BA.

Au 2^{ème} essai, il retourne un seul billet. S'il ne gagne pas, il sait qu'il a affaire au cas AA.

Au 3^{ème} essai, il retourne deux billets et il gagne.

Dans le pire des cas, Benoît gagne **170 euros** ($200 - 30$).

- c) Si Claudia ne gagne pas au départ, elle sait qu'elle a affaire à trois cas possibles : BBB, BBA et BAA. La seule possibilité d'être sûre de gagner est de savoir, à un moment du jeu, qu'elle a affaire à la configuration unique BBB.

Remarquons que $BBA = BAB = ABB$ car les compartiments appartiennent à une boîte ronde.

Aucune stratégie ne permet d'atteindre la configuration BBB de manière certaine.

1. Au premier essai, Claudia retourne trois billets. Si elle ne gagne pas, elle sait qu'elle a affaire aux cas suivants : AAB ou ABB. Au 2^{ème} essai, elle retourne deux billets. Si elle ne gagne pas, elle sait qu'elle a affaire aux cas suivants : BBB, BBA ou BAA et elle se retrouve devant les configurations qui précédaient son premier essai. En retournant un seul billet au 2^{ème} essai, si elle ne gagne pas, elle sait qu'elle a affaire à nouveau aux cas suivants : BBB, BBA ou BAA.
2. Au premier essai, Claudia retourne deux billets. Si elle ne gagne pas, elle sait qu'elle a affaire aux cas suivants : BBB, ABB ou AAB (mêmes configurations qu'avant cet essai).
3. En retournant un seul billet au premier essai, si elle ne gagne pas, elle retrouve les mêmes configurations qu'avant son essai.

Conclusion : **Claudia ne gagnera peut-être pas le moindre euro.**

- d) Si Denis ne gagne pas au départ, il sait qu'il a affaire aux 5 cas possibles suivants (à des rotations et symétries près) :

Cas 1	
B	B
B	B

Cas 2	
B	B
A	B

Cas 3	
B	B
A	A

Cas 4	
A	A
A	B

Cas 5	
B	A
A	B

1^{er} essai. Jules retourne les 4 billets. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des quatre configurations suivantes (cas 4, 3, 2 et 5) :

A	A
B	A

A	A
B	B

B	B
B	A

A	B
B	A

2^{ème} essai. Jules retourne 2 billets non contigus. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des quatre configurations suivantes (cas 4, 3, 2 et 1) :

A	B
A	A

B	A
B	A

B	A
B	B

B	B
B	B

3^{ème} essai : Jules retourne les 4 billets. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des trois configurations suivantes (cas 2, 3 et 4) :

B	A
B	B

A	B
A	B

A	B
A	A

4^{ème} essai. Jules retourne 2 billets contigus. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des quatre configurations suivantes (cas 4, 5, 2 et 1) :

A	A
A	B

B	A
A	B

A	B
B	B

B	B
B	B

5ème essai. Jules retourne les 4 billets. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des trois configurations suivantes (cas 2, 5 et 4) :

B	B	A	B	B	A
B	A	B	A	A	A

6ème essai. Jules retourne 2 billets non contigus. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des trois configurations suivantes (cas 2, 1 et 4) :

A	B	B	B	B	A
B	B	B	B	A	A

7ème essai. Jules retourne les 4 billets. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des deux configurations suivantes (cas 4 et 2) :

B	A	A	B
A	A	B	B

8ème essai. Jules retourne un seul billet. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des trois configurations suivantes (cas 3, 5 et 1) :

B	A	B	A	B	B
B	A	A	B	B	B

9ème essai. Jules retourne les 4 billets. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des deux configurations suivantes (cas 3 et 5) :

A	B	A	B
A	B	B	A

10ème essai. Jules retourne 2 billets non contigus. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des deux configurations suivantes (cas 3 et 1) :

B	B	B	B
A	A	B	B

11ème essai. Jules retourne les 4 billets. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à la configuration suivante (cas 3) :

A	A
B	B

12ème essai. Jules retourne 2 billets contigus. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à une des deux configurations suivantes (cas 5 et 1) :

B	A	B	B
A	B	B	B

13^{ème} essai. Jules retourne les 4 billets. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à la configuration suivante (cas 5) :

A	B
B	A

14^{ème} essai. Jules retourne 2 billets non contigus. Soit il gagne, soit il sait qu'il a affaire à la configuration suivante (cas 1) :

B	B
B	B

15^{ème} essai. Jules retourne les 4 billets et il gagne.

Après le 15^{ème} essai, Jules gagne **250 euros** ($400 - 15 \cdot 10$). C'est le montant qu'il peut gagner dans le pire des cas.