

# 25e championnat des jeux mathématiques et logiques

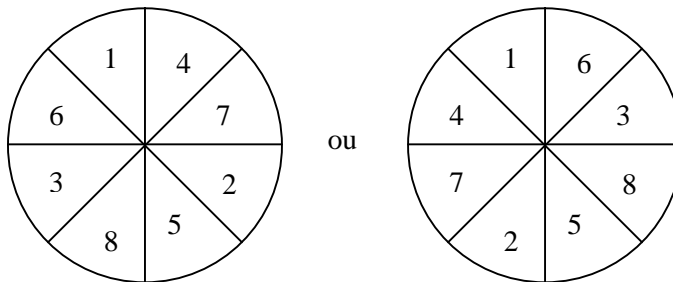
Qualification régionale valaisanne – 18 novembre 2009

## Solutions

### 1. Les cubes

3 marches → 6 cubes, 4 marches → 10 cubes, 5 marches → **15 cubes**.

### 2. Les cases



### 3. Les pièces

Nombre de pièces nécessaires pour faire un carré : 16 ( $4 \cdot 4$ ), 25 ( $5 \cdot 5$ ), 36 ( $6 \cdot 6$ ), 49 ( $7 \cdot 7$ ).

Nombre de pièces nécessaires pour faire un triangles : 15, 21, 28, 36, 45.

Le seul nombre qui convient dans les deux cas est 36. Dany possède **36 pièces**.

### 4. Les crayons

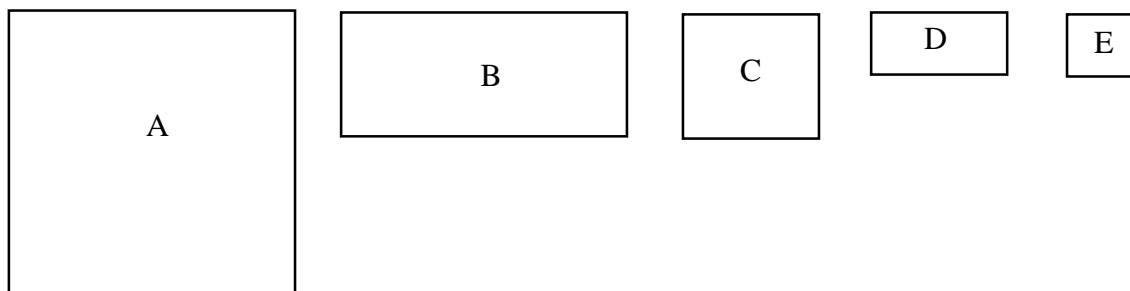
Quelques essais nous montrent que Vincent avait prêté **40 crayons**.

Nombre de crayons prêtés	60	50	40
Nombre de crayons rendus	6	5	4
Nombre de crayons en moins	54 ( $60 - 6$ )	45 ( $50 - 5$ )	36 ( $40 - 4$ )

### 5. La nappe

La grande nappe carrée (A) est devenue un rectangle (B) puis un carré (C) puis un rectangle (D) puis un carré (E) de 24 cm de côté.

Le rectangle D fait 48 cm par 24 cm. Le carré C a 48 cm de côté. Le rectangle B fait 96 cm par 48 cm et le carré A a 96 cm de côté, d'où un périmètre de **384 cm** ( $96 \cdot 4$ ).



## 6. La baignoire

Le tableau suivant nous montre l'évolution de la quantité d'eau dans la baignoire :

Temps (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	21
Quantité d'eau ajoutée (l)	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	...	12
Quantité d'eau perdue (l)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...	2
Quantité restante (l)	10	8	18	16	26	24	34	32	42	40	...	90

Il faut **21 minutes** pour remplir la baignoire.

## 7. L'animal

Ligne 4 : les lettres P, A, O, N et S peuvent être tracées.

Ligne 6 : les lettres C, H, I et E appartiennent à l'animal cherché.

Ligne 1 : la lettre T peut être tracée.

Ligne 2 : le I est forcément bien placé et le L doit être enlevé.

Ligne 3 : Le I et le E sont bien placés.

Ligne 5 : le E est mal placé, donc le B est bien placé.

L'animal cherché est **BICHE**.

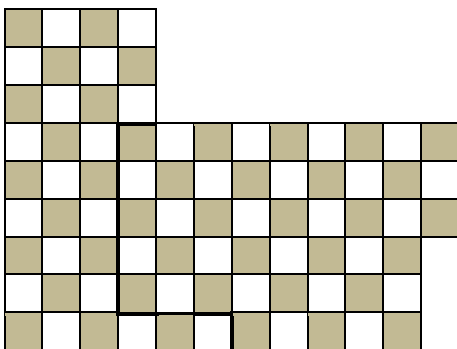
## 8. Le cahier

De 10 à 99 pages, il faut 2 chiffres pour numéroter chaque page. De 10 à 99, il y a 90 pages, soit 180 chiffres. Cela nous permet de dire qu'à la page 99, 189 (9 + 180) chiffres ont été utilisés. A partir de 100 pages, il faut ajouter 3 chiffres à chaque nouvelle page.

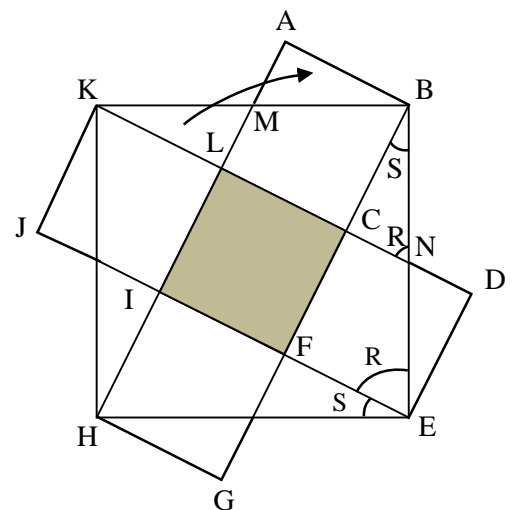
Nombre de chiffres	1	9	189	192	195	198	201	204	207	210	213	216
Nombre de pages	1	9	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108

Ce cahier a **108 pages**.

## 9. Le damier



Chacun peut découper la figure à l'endroit indiqué pour vérifier que la solution donnée est juste.



## 10. La dalle

L'aire du polygone ABCDEFGHIJKL (croix formée de 5 carrés identiques) = aire du jardin =  $144 \text{ m}^2$  ( $12^2$ ).

L'aire de la dalle =  $1/5$  de l'aire du jardin =  **$28,8 \text{ m}^2$** .

Même si cela semble évident, il aurait fallu prouver que la dalle est carrée. La somme des angles S et R de sommet E est égale à

90°. L'angle R du triangle BCN est égal à l'angle R de sommet E (par translation). L'angle S du triangle BCN est égal à l'angle S de sommet E (Les triangles BFE et HIE sont isométriques. Alors, l'angle de sommet C est égal à 90°. On peut faire le même raisonnement pour les autres angles de la dalle. Les côtés de la dalle, par symétrie de construction ont la même mesure. La dalle est bien carrée.

### 11. Les sportifs

Il y a 8 élèves qui ne savent pas jouer au basket (148 – 140).

Il y a 33 élèves qui ne savent pas skier (148 – 115).

Il y a 16 élèves qui ne savent pas nager (148 – 132).

Il y a 50 élèves qui ne savent pas patiner (148 – 98).

Supposons que l'on ait donné un numéro différent à chaque élève (de 1 à 148). Les 8 premiers ne savent pas jouer au basket, les 33 suivant ne savent pas skier, les 16 suivants ne savent pas nager et les 50 suivants ne savent pas patiner.

Tous les autres, soit **41 élèves** (148 – 8 – 33 – 50 = 41), au moins, sont capables de pratiquer les quatre sports mentionnés.

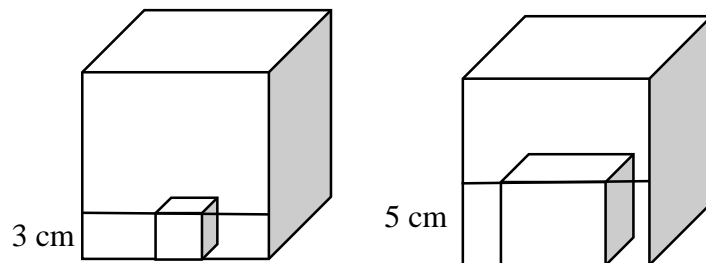
### 12. Le cube

Soit x le côté de l'aquarium cubique

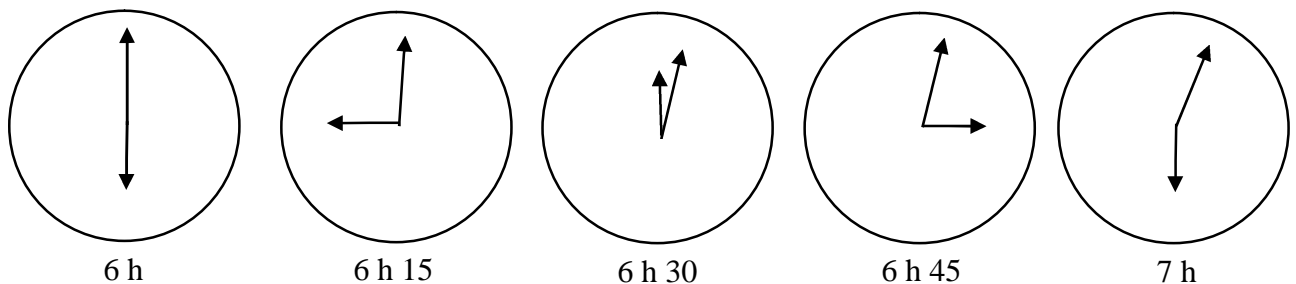
$$\text{Equation : } 3x^2 - 3^2 = 5x^2 - 5^3.$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 98 \Rightarrow x = 7.$$

Le cube a une arête de **7 cm**.



### 13. L'horloge



De gauche à droite, on a la position à 6 h puis à 6 h 15, etc. (la petite avance à la vitesse de l'aiguille des minutes et la grande à celle des heures).

Peu après 7 heures, l'horloge indiquera l'heure exacte pour la première fois, ce sera lorsque la petite aiguille aura effectué 1 tour de plus que la grande.

Distance parcourue par la grande aiguille (tours)	1	$x/43200$
Temps (secondes)	43200	x

Distance parcourue par la petite aiguille (tours)	1	$x/3600$
Temps (secondes)	3600	x

$$\text{Equation : } \frac{x}{3600} = \frac{x}{43200} + 1 \Rightarrow 11x = 43200 \Rightarrow x = 3927,27 \text{ secondes} = 1 \text{ h } 05' \overline{27}.$$

Heure cherchée = **7 h 05' 27''**.

## 14. Le tournoi

Voici un beau problème, pas facile. Il aurait été possible de demander les scores de tous les matches. Nous nous sommes restreints à demander les scores de l'équipe A, persuadé que quiconque les trouve est capable de trouver tous les autres.

A – C étant connu, il reste neuf matches :

A – B = a – b	Nous avons, selon les buts marqués et reçus :
A – D = c – d	A : a + c + e = 3
A – E = e – f	A : b + d + f = 5
B – C = g – h	B : b + g + i + k = 4
B – D = i – j	B : a + h + j + l = 6
B – E = k – l	C : h + m + s = 6
C – D = m – n	C : g + n + p = 1
C – E = s – p	D : d + j + n + q = 4
D – E = q – r	D : c + i + m + r = 6
	E : f + l + p + r = 6
	E : e + k + s + q = 5

On voit que la somme des buts marqués (égale à ceux reçus) = 23 = a + b + c + d + ... + r.

D'autre part, comme il n'y pas eu de scores identiques, les scores possibles sont 0–0, 1–0, 1–1, 2–0, 2–1, 2–2, 3–0, 3–1, 3–3, 4–0, 4–1, 4–2, etc. (tous les scores peuvent être permutés). La somme des neuf scores suivants : 0–0, 1–0, 1–1, 2–0, 2–1, 2–2, 3–0, 3–1, 4–0 = 23. Ce sont forcément les scores cherchés car tout autre score (3–3, 4–1, 4–2 etc.) conduirait à une somme dépassant 23.

Occupons-nous des trois matches de C : (choix fait plus ou moins au hasard mais le fait que  $g + n + p = 1$  y est pour quelque chose).

$$\begin{aligned} C - B &= h - g \\ C - D &= m - n \\ C - E &= s - p \end{aligned}$$

Il faut que  $g + n + p = 1$ , que  $h + m + s = 6$  et que C fasse 4 points (2 victoires ou 1 victoire et 2 matches nuls). Une étude systématique montre qu'il y a 6 possibilités :

0 – 1	0 – 1	4 – 0	2 – 0	4 – 0	2 – 0
4 – 0	2 – 0	0 – 1	0 – 1	2 – 0	4 – 0
2 – 0	4 – 0	2 – 0	4 – 0	0 – 1	0 – 1

Les scores 1–0, 4–0 et 2–0 ne pourront plus être utilisés.

Voyons maintenant les matches de A :

$$\begin{aligned} A - B &= a - b \\ A - D &= c - d \\ A - E &= e - f \end{aligned}$$

Il faut que  $a + c + e = 3$ , que  $b + d + f = 5$  et que A fasse encore 2 points (1 victoire ou 2 matches nuls). Il ne reste que 6 scores possibles : 0–0, 1–1, 2–1, 2–2, 3–0, 3–1. A nouveau, une étude systématique montre qu'il y a 6 possibilités :

2 – 2	2 – 2	1 – 3	1 – 3	0 – 0	0 – 0
1 – 3	0 – 0	0 – 0	2 – 2	2 – 2	1 – 3
0 – 0	1 – 3	2 – 2	0 – 0	1 – 3	2 – 2

Les scores 0-0, 2-2 et 1-3 ne pourront plus être utilisés. Ce sont les réponses de notre problème. Attention, le score 3-1 n'est pas juste.

Si vous voulez aller plus loin...

Voyons maintenant les matches de B :

$$B - A = b - a = 2 - 2 \text{ ou } 3 - 1 \text{ ou } 0 - 0$$

$$B - C = g - h = 1 - 0 \text{ ou } 0 - 1 \text{ ou } 0 - 2 \text{ ou } 0 - 4$$

$$B - D = i - j$$

$$B - E = k - l$$

Il faut que  $b + g + i + k = 4$ , que  $a + h + j + l = 6$  et que B fasse 4 points (2 victoires ou 1 victoire et 2 matches nuls). Scores encore possibles : 1-1, 2-1 et 3-0. Il reste 2 possibilités :

$$2 - 2 \qquad 2 - 2$$

$$1 - 0 \qquad 1 - 0$$

$$1 - 1 \qquad 0 - 3$$

$$0 - 3 \qquad 1 - 1$$

Voyons les matches de D :

$$D - A = d - c = 3 - 1 \text{ ou } 0 - 0 \text{ ou } 2 - 2 \text{ ou } 1 - 3$$

$$D - B = j - i = 1 - 1 \text{ ou } 3 - 0$$

$$D - C = m - n = 0 - 4 \text{ ou } 0 - 2 \text{ ou } 1 - 0$$

$$D - E = q - r$$

Il faut que  $d + j + n + q = 4$ , que  $c + i + m + r = 6$  et que D fasse 3 points (1 victoire et 1 match nul ou 3 matches nuls). Scores encore possibles : 2-1 ou 1-2. Il n'y plus qu'une solution :

$$D - A = 0 - 0$$

$$D - B = 3 - 0$$

$$D - C = 0 - 4$$

$$D - E = 1 - 2$$

Sachant ces résultats et en remontant les étapes précédentes, on voit que pour les matches de B, seule la deuxième possibilité est possible. Et ainsi de suite, on peut connaître tous les résultats.

		Points				
		A	B	C	D	E
A - B	2 - 2	1	1			
A - C	3 - 2	2		0		
A - D	0 - 0	1			1	
A - E	1 - 3	0				2
B - C	1 - 0		2	0		
B - D	0 - 3		0		2	
B - E	1 - 1		1			1
C - D	4 - 0			2	0	
C - E	2 - 0			2		0
D - E	1 - 2				0	2
		4	4	4	3	5