17e championnat des jeux mathématiques et logiques

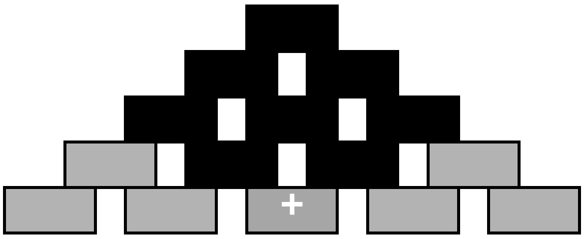
Qualification régionale valaisanne

13 novembre 2002

1. La cible. Zones touchées : **2, 11 et 23**.

2. Les boîtes

8 boîtes vont tomber (les noires).



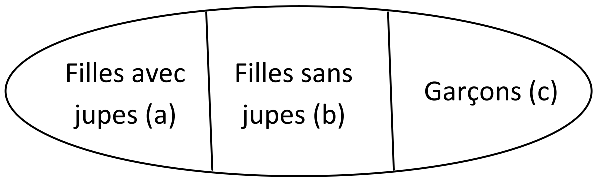
3. Les poules

Jours	lun	mar	mer	jeu	ven	sam	dim
Poule blanche	1	1	1	1	1	1	1
Poule brune	1		1		1		1
Poule rousse	1			1			1

Il peut y avoir un maximum de **14 œufs**.

4. Les jupes

Voici un schéma de la situation :



Les élèves qui ne portent pas de jupes sont les filles sans jupes ainsi que les garçons. Ils sont 20 dans ce cas. On sait que :
a + b + c = 30, a + b = 23 et b + c = 20. Ces égalités sont vraies uniquement pour a = 10, b = 13 et c = 7. Il y a donc **13 filles sans jupes**.

5. La montre de Brigitte

Supposons qu'il soit exactement 8 h 00. La montre de Brigitte indiquera 7 h 50. Comme Brigitte pense qu'elle avance de 5 minutes, Brigitte croit qu'il est 7 h 45. Il y a un décalage de 15 minutes entre l'heure exacte et l'heure estimée par Brigitte. Si elle a rendez-vous à 9 h 00, elle se fiera à son estimation et elle arrivera au rendez-vous à **9 h 15**.

Heure exacte	8 h 00	9 h 15
Heure de la montre de Brigitte	7 h 50	
Heure estimée par Brigitte	7 h 45	9 h 00

6. Les bactéries

On constate dans le tableau suivant qu'il y a 2 secondes d'écart entre le nombre de bactéries dans le cas où il y a 1 bactérie au départ et le cas où 4 bactéries sont introduites au départ. Par exemple, il faut 5 secondes pour avoir 32 bactéries dans le premier cas et 3 secondes pour avoir aussi 32 bactéries dans le second cas. Cela signifie qu'il faudra **<u>58 secondes</u>** pour remplir le bocal lorsque 4 bactéries sont introduites au départ.

Temps (secondes)	0	1	2	3	4	5	6	…
Nombre de bactéries si 1 au départ	1	2	4	8	16	32	64	…
Nombre de bactéries si 4 au départ	4	8	16	32	64	128	256	…

7. L'élection

Il suffit de **<u>8 coups</u>**. En effet, E élimine (passe par dessus) successivement F, C, A et G. Ensuite B élimine D, I élimine H, B élimine I et E élimine B.

8. La Fête-Dieu

Cherchons la date de la pleine lune qui suit le vendredi 17 mars. Elle a lieu 29 jours plus tard (4 semaines plus 1 jour). Il faut 14 jours pour aller jusqu'au 31 mars. La prochaine pleine lune sera le 15 avril (29 – 14). C'est un samedi puisque le 17 mars était un vendredi. Pâques a eu lieu le dimanche 16 avril.

La Fête-Dieu a lieu 60 jours plus tard. Comme avril compte 30 jours et que mai en compte 31, le 16 juin sera 61 jours (30 + 31) plus tard. La Fête-Dieu fut le **<u>15 juin</u>**.

9. Les sportives

En notant V comme volley, T comme tennis et B comme basket, il y a 6 situations possibles comme il est indiqué dans le tableau qui suit. Les affirmations des sportives nous permettent de dire ceci.

(a) Rosita : Si B fait du tennis $\Rightarrow$ R fait du volley
(b) Michèle : Si R fait du volley $\Rightarrow$ M fait du tennis
(c) Michèle : Si R fait du basket $\Rightarrow$ M fait du volley
(d) Bernadette : Si M fait du volley ou du tennis $\Rightarrow$ B fait du volley

Note : bien entendu les réciproques ne sont pas vraies. Par exemple, si R ne fait pas du volley n'implique pas que M ne fasse pas du tennis (b). De même, si Michèle fait du basket ne signifie pas que Bernadette ne fasse pas du volley (d).

	1	2	3	4	5	6
Rosita (R)	V	V	T	T	B	B
Bernadette (B)	T	B	B	V	T	V
Michèle (M)	B	T	V	B	V	T

Le cas 1 n'est pas possible selon l'affirmation b. Les cas 2 et 3 sont impossibles selon d. Le cas 4 joue avec toutes les affirmations (il n'y a aucune contradiction avec les affirmations). Le cas 5 est impossible selon a et le cas 6 est impossible selon c. Nous avons vérifié tous les cas car il aurait été possible d'avoir 2 solutions.

Donc **<u>Rosita fait du tennis, Bernadette joue au volley et Michèle fait du basket</u>**.

10. Les pièces de monnaie

Ce problème appartient aux jeux de Nim, des jeux qui se jouent à deux et qui, forcément, aboutissent à une fin. L'étude des jeux de Nim est passionnante et peut vite devenir complexe. On se contentera ici d'une approche plus simple.

Pour simplifier les choses, des tas formés de respectivement 1, 2 et 4 pièces seront notées de la manière suivante : (1, 2, 4) ou (2, 1, 4) ou (1, 4, 2), etc. On utilisera le symbole → quand c'est Gérard qui joue et le symbole ► quand c'est Serge qui joue.

Premier cas : il y a 4 pièces au départ. Gérard sépare les 4 pièces en 2 tas contenant respectivement 1 et 3 pièces. Serge doit séparer les 3 pièces en 2 tas contenant respectivement 1 et 2 pièces. Gérard ne peut plus jouer et perd donc la partie. Serge gagne. On aurait pu noter simplement : (4) → (1, 3) ► (1, 1, 2). C'est Serge qui a joué le dernier coup possible, alors Gérard a perdu.

Deuxième cas : il y a 5 pièces au départ. Il y a deux chemins possibles.

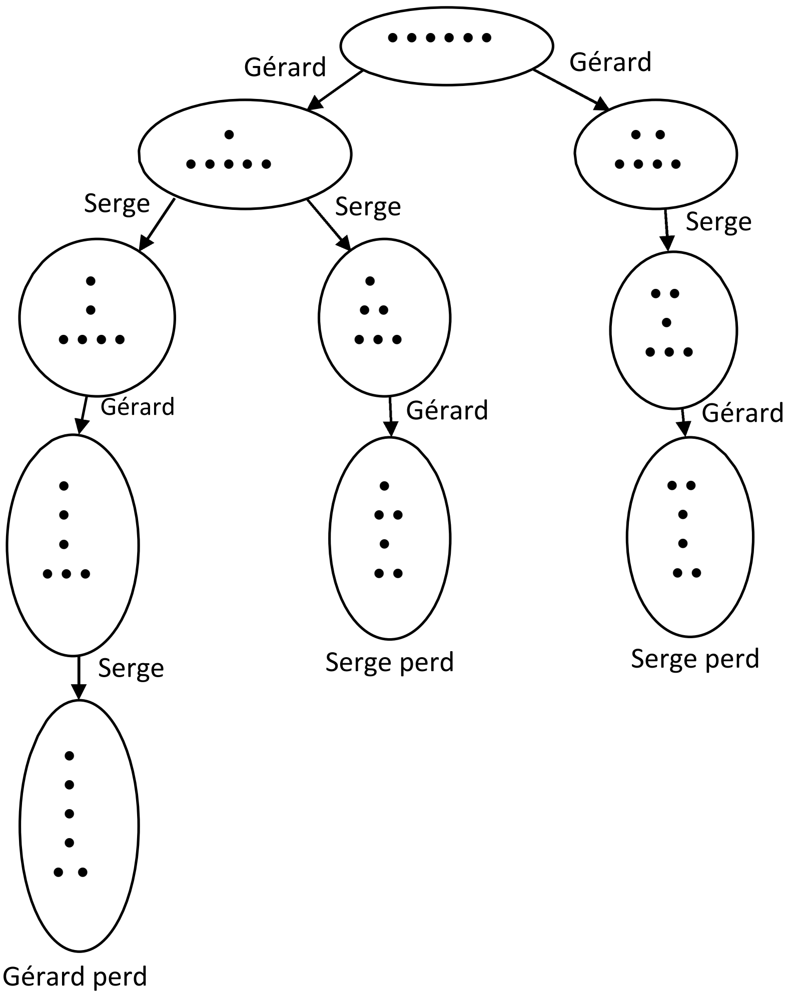
a) (5) → (2, 3) ► (2, 1, 2) ⇒ Gérard perd

b) (5) → (1, 4) ► (1, 1, 3) → (1, 1, 1, 2) ⇒ Serge perd

Comme Gérard veut gagner, il choisit la voie b. Serge ne peut pas gagner lorsqu'il y a 5 pièces.

Troisième cas : il y a 6 pièces au départ. Construisons le diagramme en arbre de toutes les possibilités. Il est facile à construire et permet de dire qui perd au bout de chaque branche. Prenons la branche de droite. Gérard est passé de (6) à (2, 4). Serge n'a pas eu le choix : il est passé de (2, 4) à (2, 1, 3). Gérard n'a pas eu non plus le choix pour passer de (2, 1, 3) à (2, 1, 1, 2). Serge ne peut plus jouer. Il perd. Donc cette partie ne peut pas être gagnée par Serge lorsque Gérard joue correctement.

Si Gérard, à son premier coup, était passé de (6) à (1, 5), il aurait fait une erreur car Serge serait ensuite passé de (1, 5) à (1, 1, 4) pour suivre la branche de gauche qui conduit à la perte de Gérard.



Dernier cas : il y a 7 pièces au départ. Un diagramme, comme pour le cas précédent, nous montrera que Serge va gagner. On se contentera ici de montrer les 3 chemins gagnants de Serge.

a) (7) → (1, 6) ► (1, 2, 4) → (1, 2, 1, 3) ► (1, 2, 1, 1, 2)

b) (7) → (2, 5) ► (2, 1, 4) … suite comme au numéro a.

c) (7) → (3, 4) ► (1, 2, 4) … suite comme au numéro a. Si après (3, 4), Serge joue (3, 1, 3), il gagne aussi.

Serge gagne les parties de **4 et 7 pièces**.

11. La balance à plateaux

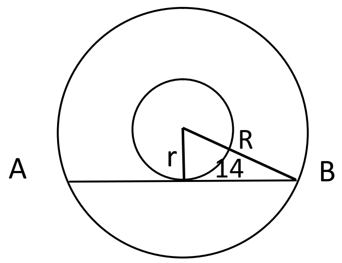
Quatre tares suffisent : **1, 3, 9 et 27 kilos**.
Du côté gauche de la balance on met la marchandise que l'on souhaite peser (ligne A dans le tableau) ainsi que, parfois, des tares (ligne B dans le tableau).
La ligne C du tableau indique les tares mises à droite de la balance.
Toutes les masses entières allant de 1 à 40 peuvent être obtenues avec les quatre tares. Ainsi, si quelqu'un veut 16 kg de pommes de terre, on met les tares de 3 et 9 kg (= 12 kg) du côté gauche de la balance et les tares de 1 et 27 kg (= 28 kg) du côté droit. La balance sera équilibrée lorsqu'il y aura 16 kg de pommes de terre avec les tares de 3 et 9 kg.

A	1	2	3	4	5	6	7	16	32	40
B		1			1 + 3	3	3	3 + 9	1 + 3	
C	1	3	3	1 + 3	9	9	1 + 9	1 + 27	9 + 27	1 + 3 + 9 + 27

Il est intéressant de constater que les tares sont des puissances de 3.

Chacun peut vérifier que les tares de 1 et 3 kg permettent de mesurer des masses entières allant de 1 à 4 kg, que les tares de 1, 3 et 9 kg permettent de mesurer des masses entières allant de 1 à 13 kg, que les tares de 1, 3, 9 et 27 kg permettent de mesurer des masses entières allant de 1 à 40 kg. En ajoutant une tare de 81kg, on pourrait aller jusqu'à 121 kg (1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121. Etc.

12. Le tapissier



Aire de la couronne = $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

Selon Pythagore: $r^2 + 14^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 14^2$

Aire de la couronne = $\pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\, 14^2$

Prix = $\frac{22}{7} \cdot 14^2 \cdot 10 =$ **6160 francs**.

13. Le partage

Soit M : la part de la mère, F : la part de la fille et G celle du garçon.

Si le bébé est un garçon, le partage se fait selon le schéma suivant :

G	G	G	M	M

Le garçon a les 3/2 de la mère, donc G = 3/2 M.

Si le bébé est une fille, le partage se fait selon le schéma suivant :

F	F	F	M	M	M	M

La fille a les 3/4 de la mère, donc F = 3/4 M.

On sait que M + G + F = 65'000 = M + 3/2 M + 3/4 M $\Rightarrow$ M = **20'000 francs**.

14. Le message du cosmos

Pour des raisons de commodité, remplaçons les • par o et les — par 1.

Colonne a : signaux originaux. Colonne b : signaux retranscrits. La colonne à gauche de a donne les numéros des signaux de a et la colonne à droite de b les numéros des signaux de b.
Le message commence par un signal bref. Notons 0 dans la case a1. Ce signal est retranscrit en 01 dans b1 (signaux retranscrits 1 et 2 notés 1-2). Comme le message reste inchangé en le retranscrivant, on peut mette le 1 de 01 en a2. Ce 1 est retranscrit en 10 qui est noté en b2. Ce 10 correspond au 3ème et 4ème signal de a. De la même manière, on peut compléter le tableau pas à pas.

	a	b				a	b	
1	0	01	1-2		17	1		
2	1	10	3-4		18	0		
3	1	10	5-6		19	0		
4	0	01	7-8		20	1		
5	1	10	9-10		21	0		
6	0	01	11-12		22	1		
7	0	01	13-14		23	1		
8	1	10	15-16		24	0		
9	1	10	17-18		25	0		
10	0	01	19-20		26	1		
11	0	01	21-22		27	1		
12	1	10	23-24		28	0		
13	0	01	25-26		29	1		
14	1	10	27-28		30	0		
15	1	10	29-30		31	0		
16	0	01	31-32		32	1		

Il nous faut trouver le 2002ème signal original ainsi que les 4 signaux qui suivent. On n'aimerait pas devoir faire le tableau jusqu'au 2002ème signal.
En observant les signaux originaux du tableau (colonnes a), on s'aperçoit que les signaux 1 et 2 sont contraires, qu'il y a une symétrie de signaux entre les signaux 1, 2, 3 et 4 (signal 1 = signal 4, signal 2 = signal 3), que les signaux de 1 à 8 sont contraires, qu'il y a une symétrie de signaux entre les signaux qui vont de 1 à 16 (1 = 16, 2 = 15, 3 = 14, 4 = 13, etc.). Et l'on peut continuer ainsi…

Signaux contraires	1 à 2	1 à 8	1 à 32	1 à 128	1 à 512	1 à 2048
Signaux symétriques	1 à 4	1 à 16	1 à 64	1 à 256	1 à 1024	1 à 4096

Utilisons le symbole $\neq$ pour contraire. On a $1 \neq 2048$, $2 \neq 2047$, $3 \neq 2046$, … , $47 \neq 2002$, $46 \neq 2003$, $45 \neq 2004$, $44 \neq 2005$ et $43 \neq 2006$. D'autre part, 1 = 64, 2 = 63, … , 18 = 47, 19 = 46, 20 = 45, 21 = 44, 22 = 43.

$47 = 18 \neq\ 2002 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1 =$ —

$46 = 19 \neq\ 2003 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1 =$ —

$45 = 20 \neq\ 2004 \Rightarrow 1 \Rightarrow 0 =$ •

$44 = 21 \neq\ 2005 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1 =$ —

$43 = 22 \neq\ 2006 \Rightarrow 1 \Rightarrow 0 =$ •

Les signaux cherchés sont : $\boxed{— \ — \ • \ — \ •}$

Ce problème est tiré des annales de la Fédération françaises des jeux mathématiques et logiques, volume 2, n° 39. Le corrigé des annales propose une autre manière de résoudre ce problème : Transformons la liste des nombres entiers naturels (ne pas oublier le 0) dans le système binaire, puis écrivons en face de chacun un 0 si l'écriture binaire comporte un nombre pair de 1 et un 1 dans les autres cas (colonne appelée code). Alors, on retrouve les signaux originaux avec un petit décalage.

Le énième signal = code du n–1 nombre naturel. Exemple : pour trouver le 5ème signal, on cherche le code de l'écriture du nombre 4 et on trouve 1.

Le 2002ème signal = code de l'écriture binaire de 2001 = 1 = signal long

Le 2003ème signal = code de l'écriture binaire de 2002 = 1 = signal long

Le 2004ème signal = code de l'écriture binaire de 2003 = 0 = signal court

Etc.

N	Écriture binaire	Code
0	0	0
1	1	1
2	10	1
3	11	0
4	100	1
5	101	0
6	110	0
7	111	1
8	1000	1
9	1001	0
2001	11111010001	1
2002	11111010010	1
2003	11111010011	0
2004	11111010100	1
2005	11111010101	0