16e championnat des jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne - 14 novembre 2001

Solutions

1. Les albums de Tintin

Prix d'un album : 50 – 42 = 8 francs.

Prix de deux albums : 8 · 2 = 16 francs.

Montant rendu par la caissière : 50 – 16 = **<u>34 francs</u>**.

2. Les bonbons

Nombre de bonbons mangés le premier jour : **<u>12 bonbons</u>** (12 + 15 + 18 = 45).

3. L'hôtel

Jours gratuits : 4, 8, 12, 14, 16, 20, 24 et 28. Il y a 8 jours gratuits.

Prix : (30 – 8) · 50 = **<u>1100 francs</u>**.

4. Le pôle de Paul

Le pôle nord est à la case **<u>4E</u>** (ou **<u>E4</u>**) notée X sur le dessin. Sur le dessin, les cases à 1 case de 4E sont notées 1, les cases à 2 cases de 4E sont notées 2, les cases à 3 cases de 4E sont notées 3 et les cases à 4 cases de 4E sont notées 4.

8	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
7	4	3	3	3	3	3	3	3	4	
6	4	3	2	2	2	2	2	3	4	
5	4	3	2	1	1	1	2	3	4	
4	4	3	2	1	X	1	2	3	4	
3	4	3	2	1	1	1	2	3	4	
2	4	3	2	2	2	2	2	3	4	
1	4	3	3	3	3	3	3	3	4	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

5. Les bougies

Avec 49 restes de bougies, Fonfon fabrique 7 bougies. Lorsque ces 7 bougies auront fondu, il en réalisera une. Donc, il pourra fabriquer **<u>8 grandes bougies</u>**.

6. Les marrons

L'affirmation « Si je prends un marron dans ma poche de gauche et que je le mets dans la poche de droite, j'ai alors le même nombre de marrons dans chacune de mes poches » est vraie pour chaque colonne tu tableau suivant :

Nombre de billes dans la poche de gauche	2	3	4	5	6	7	8	9	…
Nombre de billes dans la poche de droite	0	1	2	3	4	5	6	7	…

La seconde partie de l'affirmation n'est vraie que pour la colonne (7, 5). En passant un marron de la poche de droite à la poche de gauche, on obtient 8 marrons dans la poche de gauche et 4 marrons dans la poche de droite. Dans ce cas, Luc à **<u>12 marrons</u>** en tout.

7. Qui ne peut pneu

Il faut commander **<u>50 pneus</u>**. Ceci est vrai quel que soit le nombre de personnes ayant besoin d'un seul pneu.
On peut s'en convaincre par équations (x = nombre de personnes n'ayant besoin que d'un seul pneu, la moitié du reste représente $\frac{50-x}{2}$, etc.)

On peut trouver la solution en faisant quelques essais.

Si 10 personnes ont besoin d'un seul pneu, la moitié du reste est égale à 20 $\left(\frac{50-10}{2}\right)$. Ce qui fait 40 pneus pour ces 20 personnes. Donc, un total de 50 pneus (10 + 40).

Si 24 personnes ont besoin d'un seul pneu, la moitié du reste est égale à 13 $\left(\frac{50-24}{2}\right)$. Ce qui fait 26 pneus pour ces 13 personnes. Donc un total de 50 pneus (24 + 26).

8. Les dimanches

La question posée revient à rechercher le nombre maximum de fois que l'on retrouve un jour de semaine le énième jour de chaque mois. En effet, dans l'exemple ci-dessous, on verra que nous avons 3 fois un mercredi en partant d'un dimanche 1er janvier. En décalant les jours, on trouvera que c'est parfois le dimanche que l'on retrouve 3 fois, que parfois c'est le vendredi, etc.

Dans une année non bissextile, si le 1er janvier est un dimanche, alors le 1er février est un mercredi car janvier compte 31 jours, soit 4 semaines + 3 jours. Alors le 1er mars est un mercredi aussi car février compte 28 jours (4 semaines), le 1er avril est un samedi car mars compte 31 jours, le 1er mai est un lundi car avril compte 30 jours, soit 4 semaines et 2 jours, etc. Le tableau ci-dessous nous montre que le jour le plus représenté est le mercredi. On le trouve 3 fois.

1er janvier : dimanche	1er février : mercredi	1er mars : mercredi
1er avril : samedi	1er mai : lundi	1er juin : jeudi
1er juillet : samedi	1er août : mardi	1er septembre : vendredi
1er octobre : dimanche	1er novembre : mercredi	1er décembre : vendredi

Si le 1er janvier est un lundi, tous les premiers du mois seront décalés d'un jour et ce sera le jeudi que l'on retrouvera le plus souvent, soit 3 fois. Quel que soit le décalage, le jour qui reviendra le plus souvent se retrouvera 3 fois.

Si le 1er janvier est un dimanche et que c'est une année bissextile, on a :

1er janvier : dimanche	1er février : mercredi	1er mars : jeudi
1er avril : dimanche	1er mai : mardi	1er juin : vendredi
1er juillet : dimanche	1er août : mercredi	1er septembre : samedi
1er octobre : lundi	1er novembre : jeudi	1er décembre : samedi

Cette fois, c'est le dimanche qui revient le plus. On le trouve 3 fois.

Le nombre maximum de dimanches le premier jour du mois est **<u>3</u>**.

9. Les vaches tricolores

Soit B comme vaches blanches, N comme vaches noires et R comme vaches rousses et a, b, c, d, e, f, g, h et i, le nombre de vaches que doit recevoir chacun des fils. Selon la donnée, il y a 3a veaux appartenant aux vaches blanches (elles ont chacune 3 veaux), 2b veaux des vaches noires, etc.

Chacun des fils doit recevoir 10 vaches : a + b + c = 10 = d + e + f = g + h + i.
Il y a 10 vaches de chaque couleur : a + d + g = 10 = b + e + h = c + f + i.
Chacun des fils doit recevoir 20 veaux : 3a + 2b + c = 20 = 3d +2e + f = 3g +2h + i.

Chacun doit recevoir au moins une vache de chaque couleur et aucun lot ne peut comprendre plus de la moitié des vaches d'une couleur donnée. Cela signifie qu'aucun ne peut recevoir plus de 5 vaches.

Dans ces conditions, les sommes étant égales à 10 ne peuvent être que 1 + 4 + 5 ou 2 + 3 + 5 ou 2 + 4 + 4 ou 3 + 3 + 4 (les termes peuvent être permutés).

Les conditions imposées pour les veaux ne peuvent être réalisées que par les triplets (3, 4, 3) ou (4, 2, 4) et forcément dans l'ordre donné : $3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 = 20 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4$.

	Vaches					Veaux			
	B	N	R			B	N	R	
1er fils (aîné)	a	b	c	10	→	3a	2b	c	20
2ème fils	d	e	f	10	→	3d	2e	f	20
3ème fils	g	h	i	10	→	3g	2h	i	20
	10	10	10						

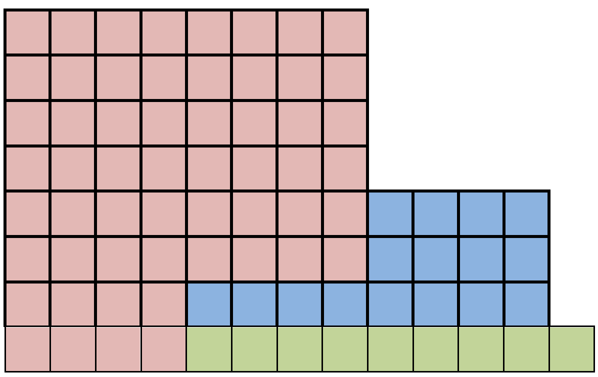
On peut compléter le tableau ci-dessous en tenant compte que l'aîné choisit le lot comprenant le plus de vaches blanches.

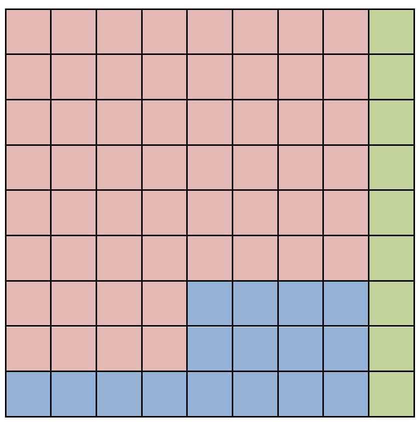
	Vaches					Veaux			
	B	N	R			B	N	R	
1er fils (aîné)	4	2	4	10	→	12	4	4	20
2ème fils	3	4	3	10	→	9	8	3	20
3ème fils	3	4	3	10	→	9	8	3	20
	10	10	10						

Lot de l'aîné : **4 vaches blanches**, **2 vaches noires** et **4 vaches rousses**.

10. Le puzzle

La surface est composée de 81 carrés. Il faudra donc forcément pouvoir faire un carré de 9 carrés de côtés. Voici une solution parmi de nombreuses autres :



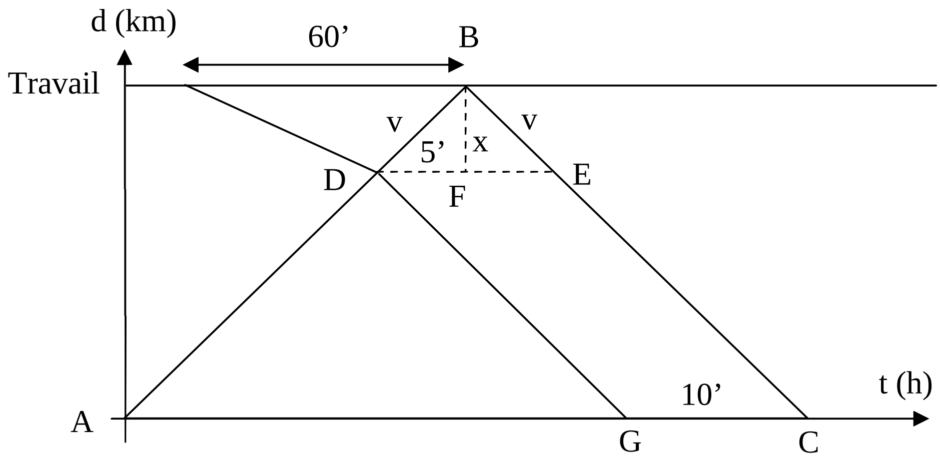


11. Le marcheur

Les triangles ABC, ADG et BDE sont isocèles. Pour aller de D à E (en passant par B), Madame Durand met 10 minutes. Comme les triangles sont isocèles, il faut 5 minutes pour aller de D à B. Alors, monsieur Durand a marché pendant **<u>55 minutes</u>** !

On peut se compliquer la tâche en passant par des équations (t = temps cherché) :

$$2v = \frac{2x}{10} \text{ et } v = \frac{x}{60-t} \Rightarrow v = \frac{x}{5} = \frac{x}{60-t} \Rightarrow 60 - t = 5 \Rightarrow t = 55.$$



12. Le sacristain

Le sacristain commence par chercher les produits de 3 facteurs (avec des âges vraisemblables) qui donnent 2450. Pour cela, la décomposition de 2450 en facteurs premiers va l’aider.

$2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$. Voici ci-dessous 12 triplets d’âges possibles ainsi que les sommes.

$1 \cdot 35 \cdot 70 \to 106$	$1 \cdot 49 \cdot 50 \to 100$	$1 \cdot 25 \cdot 98 \to 124$
$2 \cdot 25 \cdot 49 \to 76$	$2 \cdot 35 \cdot 35 \to 72$	$5 \cdot 5 \cdot 98 \to 108$
$5 \cdot 7 \cdot 70 \to 82$	$5 \cdot 10 \cdot 49 \to \underline{64}$	$5 \cdot 14 \cdot 35 \to 54$
$7 \cdot 7 \cdot 50 \to \underline{64}$	$7 \cdot 10 \cdot 35 \to 52$	$7 \cdot 14 \cdot 25 \to 46$

Le curé a dit au sacristain que la somme est égale au double de son âge. Si le sacristain avait 53 ans, il saurait que la somme devrait être de 106 et il connaîtrait les âges des trois personnes (1, 35 et 70). De la même manière, le sacristain aurait pu connaître les âges des trois personnes dans tous les autres cas sauf lorsque la somme est 64, somme qui apparaît deux fois. Les trois personnes ont soit 5, 10 et 49 ans, soit 7, 7 et 50 ans.

Le fait que le curé dise ensuite qu’une des personnes est plus âgée que lui signifie qu’il a **<u>49 ans</u>**. En effet si le curé avait moins de 49 ans, le sacristain ne pourrait toujours pas savoir les âges des trois personnes car il aurait toujours le doute entre les deux possibilités. Les trois personnes ont 7, 7 et 50 ans.

13. Les sacs de billes

Dans un premier temps, pour bien comprendre ce qui se passe, imaginons qu’Albert ait 11 billes dans un de ses sacs et 25 dans l’autre. Voyons ce qui se passe sachant qu’il perd à chaque partie.

Nombre de billes	25	14	3	3	3	3	1	1	0
Nombre de billes	11	11	11	8	5	2	2	1	1

Pour des raisons pratiques, nous allons écrire le contenu des deux sacs sous forme de couples : (25,11) ou (3,8), etc.

En fin de partie, le contenu des sacs sera (0,1). Il suffit d'essayer quelques cas pour s'en convaincre. Ne jamais oublier qu'au départ les nombres de billes contenues dans les deux sacs ne possèdent pas de diviseur commun autre que 1.

Seule la configuration (1,1) conduit à (0,1). Seule la configuration (1,2) conduit à (1,1). Ce qui signifie que toutes les parties finissent dans l'ordre suivant : (1,2), (1,1) et (0,1).

Seuls les cas (3,2) et (1,3) conduisent à (1,2). Comme on cherche le nombre maximum de billes possibles, on choisit (3,2). Seuls (5,2) et (3,5) conduisent à (3,2). On choisit (3,5) pour avoir le maximum de billes.

Si (a, b) constitue le nombre de billes contenues dans les sacs, au jeu précédent, le nombre de billes correspond à (a+b, b) ou (a, b+a). On peut maintenant « remonter » les parties.

De plus, le nombre total de billes est une suite que l'on peut aisément « remonter » à l'infini si l'on remarque que chaque nombre, à partir du 3ème, équivaut à la somme des deux nombres précédents. En effet, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, etc.

Avant le début de la première partie, Albert avait **610 billes**.

Nombre de billes						21	21	8	8	3	3	1	1	0
Nombre de billes						44	13	13	5	5	2	2	1	1
Nombre total de billes	610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1
Nombre de parties	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	fin

Le nombre total de billes (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc.) est une suite bien connue des mathématiciens. C'est une suite dite de Fibonacci. Le énième nombre de la suite peut être trouvé par la formule $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$.

14. Les dépenses de Dédé Panse

Comme il lui restait autant de centimes qu'il avait de francs au départ, on peut dire que la somme au départ vaut ab,cd et somme à la fin ef,ab. Les chiffres a, b, c, d, e et f appartiennent à N et sont inférieurs à 10. On a alors, en base 10 :

ab,cd = 10a + b + 0,1c + 0,01d et ef,ab = 10e + f + 0,1a + 0,01b.

Comme il a dépensé la moitié de l'argent qu'il avait au début, on a l'équation (10a + b + 0,1c + 0,01d) : 2 = 10e + f + 0,1a + 0,01b.

Comme il lui restait la moitié moins de francs qu'il avait de centimes initialement, on obtient l'équation (10c + d) : 2 = 10e + f. Attention, le nombre représentant les centimes au départ s'écrit maintenant 10c + d car il s'agit du nombre cd (et non pas de 0,cd).

La première équation devient 9,8a + 0,98b + 0,1c + 0,01d = 20e + 2f (1).

La seconde équation devient 10c + d = 20e + 2f (2).

De (1) et (2), on obtient 9,8a + 0,98b + 0,1c + 0,01d = 10c + d $\Rightarrow$ 980a + 98b + 10c + d = 1000c + 100d $\Rightarrow$ 980 a + 98b = 990c + 99d $\Rightarrow$ 98 (10a + b) = 99 (10c + d) $\Rightarrow \frac{98}{99}=\frac{10c+d}{10a+b}$.

10c + d = 98 $\Rightarrow$ c = 9 et d = 8. 10a + b = 99 $\Rightarrow$ a = 9 et b = 9.

La somme de départ est **99,98 francs**. Il a dépensé la moitié de ce montant, soit 49,99 francs.