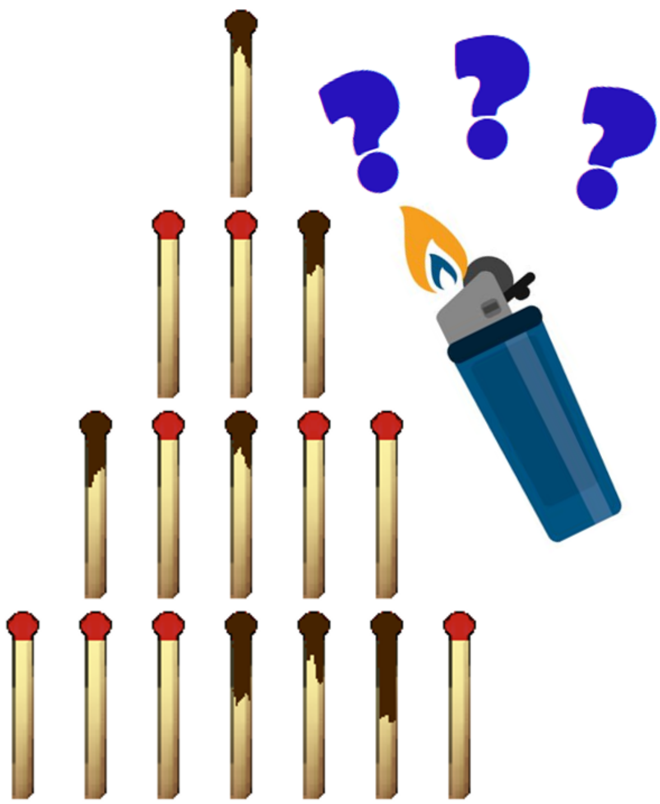
Jeux de Nim



Follonier Alain

Professeur accompagnant : Combe Michel
MATHM 18 1 CM 01

Travail de maturité - Lycée Collège des Creusets - Sion
1 octobre 2018

Résumé

Ce travail de maturité porte sur l'analyse d'une catégorie de jeux combinatoires : les jeux de Nim. Ce sont des jeux opposants deux joueurs et ne nécessitant aucun matériel particulier. Un exemple assez connu est le jeu des bâtonnets de Fort Boyard ; mais il existe bien d'autres variantes de jeu qui peuvent également demander plus de réflexion pour les cerner. L'objectif de ce travail consiste à les appréhender au travers de diverses approches logiques et mathématiques afin de trouver la stratégie à adopter pour maximiser ses chances de gagner.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les jeux de Nim ont des origines très anciennes que l'on ne peut pas situer avec certitude dans le temps et dont nous ne savons pas qui en est l'inventeur initial. Tout ce que nous savons est que les premières traces de ces jeux ont été signalées en Chine au XVI^e siècle sous le nom de *fan-tan* puis en Afrique sous celui de *tiouk-tiouk*. C'est le mathématicien anglais Charles Léonard Bouton qui, en 1901, leur a donné leur appellation actuelle et ce nom provient de l'allemand «nimm» qui signifie «prends !». Ces jeux ont été popularisés à travers le monde grâce au film d'Alain Resnais «*L'Année dernière à Marienbad*» paru en 1961 et qui a donné son nom à une version de ces jeux : le jeu de Marienbad.

1.1 Principes fondamentaux

Les jeux de Nim sont des jeux de stratégie pure dans lesquels s'opposent 2 joueurs ; cela signifie que le hasard n'y a pas sa place. Ils regroupent beaucoup de variantes de jeux différents mais qui suivent le même schéma. Les 2 joueurs ont devant eux un certain nombre d'objets tels que des pièces, des allumettes, des jetons... disposés en lignes ou en tas. Ils agissent à tour de rôle en retirant des objets selon les différentes contraintes établies par les règles jusqu'à ce qu'un des joueurs ne puisse plus jouer. Une des caractéristiques les plus importantes de ces jeux est que chaque coup mène à une situation différente. Autrement dit, les joueurs peuvent aller de la situation A à la B, puis de la B à la C ; mais ils ne pourront en aucun cas revenir de la C à la A ou à la B. Cela empêche tout cycle de répétition de se former et la partie aura nécessairement une fin avec un gagnant et un perdant (aucune égalité possible).

1.2 Jeux combinatoires

Ces jeux forment une partie d'un ensemble de jeux plus généraux soumis à une même théorie mathématique : la **théorie des jeux combinatoires**. Elle se concentre sur les jeux à 2 joueurs qui jouent chacun à leur tour un coup, d'une manière déterminée par les règles, et chaque coup est défini par un concept de *position* (une position représente une certaine situation du jeu ; dans les jeux de Nim, une certaine disposition des allumettes). Les jeux concernés par cette théorie se nomment les jeux combinatoires et ont les caractéristiques suivantes :

- 2 joueurs s'affrontent à tour de rôle.
- La partie se compose d'un nombre fini de positions dont une position de départ.
- Des règles définissent clairement les coups qui sont autorisés/interdits au joueur. Mais elles séparent ces jeux en 2 catégories : ceux qui sont **partisans**, c'est à dire ceux où les 2 joueurs n'ont pas les mêmes possibilités pour changer de position, et ceux qui sont **impartiaux** où elles sont identiques (les jeux de Nim en font partie).
- Ils sont à information complète : les 2 joueurs ont la connaissance parfaite du jeu (aucun mouvement caché et pas de déplacements simultanés).
- Le hasard n'intervient jamais au cours du jeu.
- Chaque coup exécuté par les joueurs doit les rapprocher de la fin de la partie : ce ne sont donc pas des jeux nuls (qui ne se terminent jamais) et finir sur une égalité est impossible.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, la partie s'arrête.

1.3 Stratégie gagnante

Dans les jeux de Nim comme dans les jeux combinatoires, il est toujours possible de trouver une **stratégie gagnante** en fonction des règles établies. Si un joueur parvient à la découvrir, il s'assure la victoire dans presque tous les cas ; d'autant plus si son adversaire ne la connaît pas. Cette stratégie dépend néanmoins d'un facteur déterminant : **qui commence la partie**. Cela signifie que même en connaissant la méthode à suivre, vous ne gagnerez pas nécessairement. La clé de ces jeux réside dans les différentes positions où chacune d'elle est soit **gagnante** soit **perdante**. Une position gagnante signifie que si le joueur dans cette situation connaît la bonne stratégie à adopter, il gagnera forcément. Tandis qu'une position perdante est l'inverse ; si votre adversaire la connaît, vous n'avez aucune chance de sortir victorieux de la partie. Cela a pour conséquence que si vous devez jouer en premier et que la position initiale est perdante, la seule possibilité qu'il vous reste pour gagner est d'espérer que votre adversaire ne connaisse pas la stratégie ou qu'il commette une erreur.

Chapitre 2

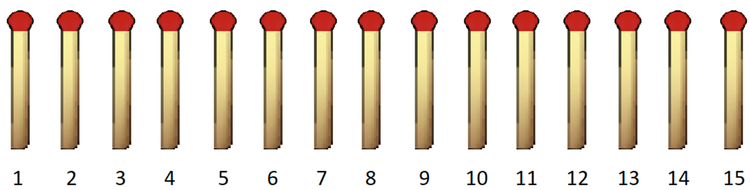
Jeu de Nim en ligne

Nous allons analyser ces jeux en commençant par un des plus simples à comprendre, le jeu de Nim en ligne (autrement dit, à un seul tas), afin de faciliter l'approche des jeux suivants qui peuvent être beaucoup plus complexes. Ce jeu consiste à placer un nombre n d'allumettes en une unique ligne ou tas. Le but pour le joueur est de prendre la dernière allumette mais, selon les règles, il a plus ou moins de contraintes quant au nombre d'allumettes qu'il est autorisé à retirer. Il existe également un autre mode de jeu dit **misère** dans laquelle c'est le joueur prenant le dernier objet qui perd la partie. Nous pouvons prendre la version la plus triviale où il n'y a aucune restriction pour illustrer simplement ces deux cas. Dans le mode "normal", celui qui commence n'a qu'à prendre toutes les allumettes pour remporter la partie ; tandis qu'en misère, il en laisse une ainsi son adversaire est obligé de la prendre et perd. Cette version est donc peu intéressante ; c'est pourquoi nous allons principalement développer quelques-unes avec contraintes.

2.1 Différentes versions

1^{ere} version

Dans cette première version, le joueur est contraint à retirer 1, 2 ou 3 allumettes et celui qui enlève la dernière gagne. Ce changement relatif au nombre d'allumettes autorisé à prendre augmente considérablement la difficulté du problème. Le joueur n'est plus autorisé à retirer toutes les allumettes et ne peut pas se contenter d'en prendre un nombre aléatoire s'il veut être sûr de gagner. Pour essayer de comprendre quelle stratégie adopter, nous allons commencer par la fin (situation où il n'y a plus d'allumette) pour remonter jusqu'à la situation de départ en déterminant quelles sont les positions **gagnantes** ainsi que les **perdantes**.



Voici une figure qui va nous aider à nous représenter les différents cas. Les allumettes sont numérotées de 1 à 15. Ces nombres correspondent aux positions durant la partie (par exemple, nous appellerons "position 5" la situation où il restera 5 allumettes).

- Prenons la position 1. Nous pouvons aisément la considérer comme position gagnante car le joueur peut la prendre et gagner. Il en va de même pour les positions 2 et 3.
- La situation 4 change des trois précédentes car les règles n'autorisent pas le joueur à retirer 4 allumettes. S'il enlève 1, 2 ou 3 allumettes, il en restera respectivement 3, 2 ou 1. Dans les trois cas de figure, son adversaire se retrouvera dans une position gagnante expliquée ci-dessus. Donc la position 4 est perdante.
- Dans les situations 5, 6 et 7, l'idée est exactement la même que pour 1, 2 et 3 sauf qu'à la place de toutes les prendre, le but du joueur est d'en laisser seulement 4 car c'est une position perdante.
- La position 8 est perdante car celui qui va jouer sera contraint de laisser 5, 6 ou 7 allumettes.
- ...

Le principe, que l'on prenne 15 ou n objets, ne changera jamais ; il peut donc être généralisé. Suite à cet exemple, nous pouvons ressortir la liste des positions gagnantes : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, ... ainsi que celle des perdantes : 4, 8, 12, ... Nous voyons apparaître un enchaînement qui se répète de manière régulière : trois positions gagnantes puis une perdante. Nous remarquons que dans cette 2eme suite, tous les nombres sont des multiples de 4. Cela nous permet de déduire la totalité des positions perdantes (PP) :

$$PP = 4 \cdot k, \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

La stratégie gagnante consiste à pousser son adversaire dans une situation perdante. Si le joueur parvient à le faire, il lui suffira de faire en sorte que la somme d'allumettes retirées en deux tours (celui de son adversaire et le sien) soit égale à 4. Cela n'est pas toujours possible, car l'issue de la partie est déjà définie par le nombre d'allumettes au début de la partie et par quel joueur commence. Par exemple, si la situation initiale comporte 25 allumettes, celui qui commence va gagner puisqu'en en enlevant une, il en restera 24 et c'est une position perdante. Tandis que s'ils commencent avec 36 allumettes, la situation initiale est perdante donc celui qui débute n'a aucune chance de gagner sauf si son adversaire commet une erreur.

2^{eme} version

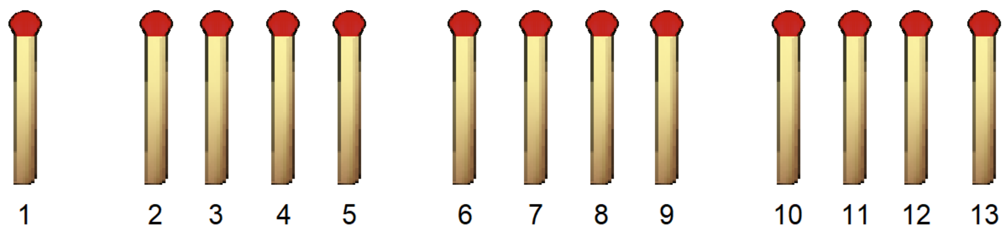
Ce mode de jeu est très similaire au 1^{er}. Les règles relatives aux contraintes sont identiques sauf que le joueur prenant la dernière allumette sort perdant de la partie. C'est donc sa version **misère**.

Nous pouvons expliquer pourquoi les différentes situations sont gagnantes ou perdantes de manière analogue au point précédent.

- Position 1 : c'est évidemment une position perdante puisque le joueur est obligé d'en prendre au moins une durant son tour.
- Positions 2, 3 et 4 : le joueur n'a qu'à retirer respectivement 1, 2 ou 3 allumettes pour que, au tour suivant, son adversaire soit en position 1 (perdante). Elles sont donc gagnantes.
- Position 5 : si le joueur prend 1, 2 ou 3 allumettes, il mettra dans tous les cas son opposant dans une des positions du point ci-dessus, donc elle est perdante.
- Positions 6, 7 et 8 : elles sont gagnantes ; car le joueur peut dans ces trois situations faire en sorte d'en laisser 5.
- Position 9 : cette position est perdante. L'idée pour le montrer est la même que pour la situation 5. Et ainsi de suite...

Pour obtenir la stratégie gagnante, le principe est semblable à celui de la 1^{er} version sauf qu'il faut "décaler de 1" les positions perdantes. Elles peuvent être écrites sous la forme :

$$PP = 4 \cdot k + 1, \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$



Ce déplacement est dû au fait que c'est une version misère donc la position 1 devient perdante (à la place de la "position 0" dans la version normale). Cela a pour unique conséquence que le but de chaque joueur est de forcer son adversaire à se retrouver en position 1. En reprenant l'exemple de la version précédente, 25 deviendra une position de base perdante et donc 36 en sera une qui est gagnante.

2.2 Généralisation

Nous allons à présent faire un cas général qui permettra de déterminer les positions gagnantes et perdantes si on joue avec un nombre quelconque "n" d'allumettes et où on peut en retirer un nombre "x" par tour.

2.2.1 Les modulos

L'outil principal pour trouver cette stratégie est le **modulo**. «En mathématiques et en programmation informatique, on désigne par **modulo** l'opération de calcul du reste de la division euclidienne (ou division entière)»[1]. Prenons un numérateur a et un dénominateur b. On notera ce modulo : $a\ mod\ b$.[2]
Par exemple, le modulo de $\frac{15}{4}$ est $15\ mod\ 4 = 3$ car 15 divisé par 4 donne 3 et le reste est 3.
Nous pouvons obtenir ce modulo grâce à l'opération suivante :

$$a\ mod\ b = a - b \cdot E\left(\frac{a}{b}\right)$$

La fonction $E(x)$ se nomme partie entière. Elle consiste à prendre le plus grand entier inférieur ou égal au nombre x, donc $E(x)$ est unique. Ceci revient à arrondir x toujours vers le bas. Par exemple, $E(5.93) = E(5.31) = E(5) = 5$.
Un modulo nous permet de séparer les nombres entiers en différentes parties nommées **classes modulo n**. La classe modulo n d'un élément $x \in \mathbb{N}$ est composée de tous les nombres y **congrus** à x modulo n. Dire que deux éléments de $\mathbb{N}$ x et y sont congrus équivaut à dire que $x\ mod\ n = y\ mod\ n$ et donc que les divisions euclidiennes de x et de y par n donnent le même reste. Par exemple, 5, 8, 14, 35, ... sont congrus modulo 3 car

$$5\ mod\ 3 = 8\ mod\ 3 = 14\ mod\ 3 = 35\ mod\ 3 = 2$$

Ils appartiennent donc à la même classe. Dans ce cas, c'est la classe modulo 3 dont le reste vaut 2. On la notera $\overline{2_3}$. Il existe toujours un nombre fini de classes modulo n. Prenons un x quelconque, il est assez simple de se persuader que $x\ mod\ n$ donnera dans tous les cas un nombre entre 0 et $n-1$ donc il y aura n classes qui seront : $\overline{0_n}$, $\overline{1_n}$, $\overline{2_n}$, ..., $\overline{(n-1)_n}$ et l'union de toutes ces classes est l'ensemble des entiers naturels. Si $n = 3$, il y aura les classes :

- $\overline{0_3} = \{0, 3, 6, 9, ...\}$
- $\overline{1_3} = \{1, 4, 7, 10, ...\}$
- $\overline{2_3} = \{2, 5, 8, 11, ...\}$

On peut remarquer que $\overline{0_3} \cup \overline{1_3} \cup \overline{2_3} = \mathbb{N}$.

2.2.2 Stratégie gagnante

Grâce à la notion de modulo, il nous est beaucoup plus facile à comprendre la stratégie gagnante de ce jeu. Comme nous l'avons vu dans la section ci-dessus, cette stratégie consiste à faire que votre adversaire soit toujours dans des positions perdantes afin qu'il ne puisse jamais reprendre l'avantage. Nous avions trouvé que ces positions étaient : $PP = 4 \cdot k$, avec $k \in \mathbb{N}$ dans la version normale et décalée de 1 pour la misère. Cet ensemble correspond à la classe $\overline{0_4}$. Pour mieux comprendre ceci, voici un tableau mettant en commun tous ces éléments.

Position / x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Gagnante / Perdante	P	G	G	G	P	G	G	G	P	G	G	G	P	G	G	G
Reste/ $x_i\ mod\ 4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Ci-dessus, d'où vient le 4 qui multiplie le k dans la formule $PP = 4 \cdot k$ et pourquoi écrit-on dans le tableau $x_i\ mod\ 4$ au lieu de $x_i\ mod\ 3$ ou $x_i\ mod\ 5$? Il correspond à 1 plus le nombre d'allumettes autorisées à enlever par tour. Rappel : en augmentant ce nombre de 1, le joueur qui a mis son adversaire en position perdante est certain de pouvoir le refaire au tour suivant.
Cela nous permet de faire un cas général des positions perdantes pour ce jeu en fonction du nombre maximal n d'objets à retirer :

- $PP = \overline{0_{n+1}} = (n+1) \cdot k$, avec $k \in \mathbb{N}$ (pour le mode normal)
- $PP = \overline{1_{n+1}} = (n+1) \cdot k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$ (pour la misère)

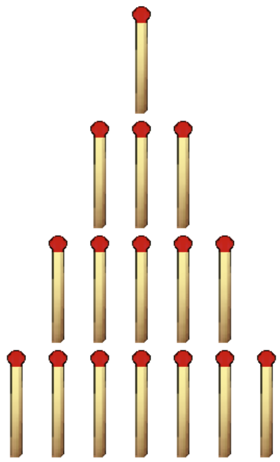
1. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Modulo_(op%C3%A9ration)
2. Dans certains langage informatique on écrira un "%" pour représenter le modulo.

Chapitre 3

Jeu de Marienbad

Maintenant que nous nous sommes familiarisés avec le concept de positions gagnantes et perdantes, nous allons nous concentrer sur un jeu qui fut mondialement connu grâce au film d'Alain Resnais «L'Année dernière à Marienbad» paru en 1961 : le jeu de Marienbad.

C'est un cas particulier du jeu de Nim à plusieurs tas. Plus généralement, ce jeu est constitué d'un nombre n de tas (généralement inégaux) composés d'allumettes. Ce jeu est beaucoup plus complexe que le précédent étant donné qu'il ne se joue plus avec des allumettes sur une seule ligne mais avec 16 allumettes réparties en 4 lignes de respectivement 1, 3, 5 et 7 objets. Ce changement augmente fortement la difficulté pour parvenir à trouver la liste des positions perdantes étant donné qu'il y a un total de 384 positions[3] dont 48 perdantes et 336 gagnantes. De plus, les règles sont différentes. Le joueur est autorisé à retirer le nombre d'allumtes de son choix (au minimum 1) d'une seule ligne. La partie s'arrête dès qu'il n'y a plus d'allumette et, dans la version que nous allons tout d'abord analyser, celui qui prend la dernière perd (version misère).



Position initiale

- *Le supposé Mari : « Je connais un jeu où je gagne toujours. »*
- *L'inconnu : « Si vous ne pouvez pas perdre, ce n'est pas un jeu ! »*
- *Le supposé Mari : « Je peux perdre, mais je gagne toujours. »*
- *L'inconnu : « Essayons ! »*

Ces répliques introduisent une scène du film où ces deux personnages vont longuement jouer à ce fameux jeu et, comme l'a dit le supposé Mari, il gagne toujours. Ces répliques prennent tout leur sens grâce au concept de positions que nous avons éclairci précédemment. « Je peux perdre, mais je gagne toujours » signifie qu'il ne commence pas nécessairement dans une position gagnante donc « il peut perdre » mais, étant donné que son adversaire ne connaît pas la stratégie gagnante, « il gagne toujours ».

Nous étudierons ce jeu dans un premier temps en nous mettant à la place de l'inconnu, c'est à dire contre quelqu'un qui gagne à tous les coups, donc de manière expérimentale ; puis nous traiterons 2 stratégies gagnantes : grâce à la numération binaire et par regroupements mentaux.

3.1 Partie expérimentale

Dans cette partie, je vais vous présenter le travail que j'ai fait avant de commencer à rechercher les différents éléments théoriques ou à examiner les solutions. Cette section comporte donc une approche purement expérimentale qui dévoile les premières conclusions que l'on peut tirer en n'ayant aucune connaissance (ou très peu) sur le sujet. Pour ce faire, j'ai commencé à jouer contre un programme informatique[4] qui connaît la stratégie gagnante afin de me familiariser avec ce jeu.

La première observation que l'on peut faire porte sur la quantité très élevée d'options qu'à le joueur qui commence par rapport à d'autres jeux. Il en a 16 alors que dans le jeu de Nim en ligne, il n'en a que 3. Admettons qu'il retire une seule allumette, son adversaire aura 15 autres possibilités et ainsi de suite. Si nous étudions ce jeu à l'envers, c'est à dire en commençant à partir de la situation finale jusqu'à l'initiale, nous pouvons remarquer les positions perdantes de base. Nous noterons les positions (a, b, c, d) de telle sorte que chaque lettre corresponde au nombre d'allumettes par ligne : (1, 3, 5, 7) $\Rightarrow$ la position initiale et (0, 0, 0, 0) $\Rightarrow$ la finale. Nous allons à présent expliquer les situations perdantes (ce sont les différents types de positions de base et non pas tous les cas spécifiques car (1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2) et (1, 2, 2, 1) ne sont pas les mêmes positions mais elles sont semblables ; c'est-à-dire que nous devons jouer exactement

3. Pour chaque position, dans la première ligne, il y a soit 1 allumette soit 0 ; dans la deuxième, il y en a 0, 1, 2 ou 3 ; dans la troisième, entre 0 et 5 et dans la dernière, entre 0 et 7. En multipliant le nombre possible d'allumettes de chaque ligne, nous obtenons : $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$.

4. http ://nezumi.dumousseau.free.fr/im10/nim.html

de la même manière dans chacune de ces positions mais elles représentent 3 positions différentes parmi les 384) :

1) (0, 0, 0, 1) : le joueur prenant la dernière perd.
2) (0, 1, 1, 1) : ils ne peuvent en prendre que dans une seule ligne.
3) (0, 0, 2, 2) : si votre adversaire en prend une, vous prenez les 2 autres et inversement.
4) (0, 1, 2, 3) : peu importe lesquelles il retire, vous arrivez simplement à revenir dans l'une des positions ci-dessus.
5) (1, 1, 2, 2) : il en enlève une qui est seule et vous prenez l'autre : on arrive dans le cas 3) ; il en prend une ou deux dans une ligne de 2 et vous, deux s'il en prend 1 ou une s'il en prend deux afin d'arriver dans la situation 2).
6) (0, 0, 3, 3), (1, 1, 3, 3), (0, 0, 4, 4), (1, 1, 4, 4), (0, 0, 5, 5) et (1, 1, 5, 5) : vous devez jouer symétriquement à votre adversaire (par exemple, pour la position (1, 1, 5, 5), s'il prend deux allumettes dans une ligne de 5, vous en prendrez également deux dans l'autre ligne de 5 pour finir dans les positions 3) ou 5) ; sauf s'il en prend plus de une dans la position (0, 0, 3, 3) mais dans ce cas vous arriverez dans la position 1).

A partir de celles ci-dessus, nous pouvons rajouter un nombre n d'allumettes à une seule ligne de telle sorte qu'il n'y ait jamais plus d'allumettes que le nombre initial pour avoir une position gagnante. Si nous répétons l'opération avec tous les n possibles pour chaque ligne de chaque position perdante spécifique, nous trouverons un grand nombre de positions gagnantes. Cela fait, nous pouvons recommencer à jouer contre l'ordinateur en analysant attentivement chaque coup pour savoir si nous sommes dans une position gagnante ou dont on ne connaît pas encore la nature. Si nous sommes dans une position indéterminée, nous devons faire en sorte d'aller dans une autre situation indéterminée et, à partir ce cette dernière, nous verrons si le programme nous met dans une position perdante ou gagnante et donc nous saurons la nature de cette position ou s'il nous remet dans une nouvelle position indéterminée et il nous faudra recommencer ce processus. A partir du moment ou nous sommes dans une position dont on ne sait pas la nature et que l'on ne peut pas arriver sur une autre de cette sorte, il y a un moyen infaillible de savoir si notre position est gagnante ou pas. Elle l'est si nous avons la possibilité d'aller dans une situation perdante et elle ne l'est pas si nous sommes contraints d'arriver sur des positions gagnantes.
A ces types de situations perdantes s'ajoutent les 6 différentes positions suivantes. Elles seront présentées sous la forme de tableaux dans lesquels les colonnes nous diront ce que nous (J) devons retirer en fonction de ce que prend notre adversaire (A) et dans quelle autre position perdante nous l'avons mené.

7) (0, 1, 4, 5) :

Si A prend ... allumettes	dans la ligne de ...,	J prend ...	dans la ligne de ...	Position finale
1	1	1	5	6)
1 ou 2	4	3 ou 2	5	4)
3	4	4	5	2)
4	4	5	5	1)
1	5	1	1	6)
2 ou 3	5	2 ou 1	4	4)
4	5	3	4	2)
5	5	4	4	1)

8) (0, 2, 4, 6) :

Si A prend ... allumettes	dans la ligne de ...,	J prend ...	dans la ligne de ...	Position finale
1	2	1	6	7)
2	2	2	6	6)
1 ou 3	4	5 ou 3	6	4)
2 ou 4	4	6 ou 4	6	3)
1	6	1	2	7)
2	6	2	2	6)
3 ou 5	6	3 ou 1	4	4)
4 ou 6	6	4 ou 2	4	3)

9) (0, 2, 5, 7) :

Si A prend ... allumettes	dans la ligne de ...,	J prend ...	dans la ligne de ...	Position finale
1	2	3	7	7)
2	2	2	7	6)
1	5	1	7	8)
2 ou 4	5	6 ou 4	7	4)
3 ou 5	5	7 ou 5	7	3)
1	7	1	5	8)
2	7	2	2	6)
3	7	1	2	7)
4 ou 6	7	4 ou 2	5	4)
5 ou 7	7	5 ou 3	5	3)

10) (0, 3, 4, 7) :

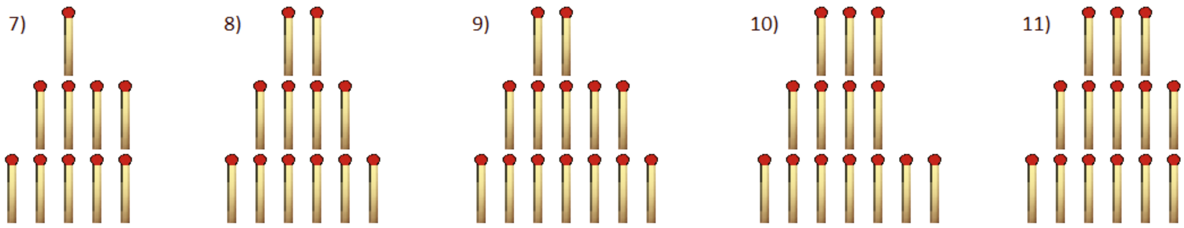
Si A prend ... allumettes	dans la ligne de ...,	J prend ...	dans la ligne de ...	Position finale
1 ou 2	3	1 ou 2	7	8) ou 7)
3	3	3	7	6)
1 ou 4	4	7 ou 3	7	6)
2 ou 3	4	6 ou 5	7	4)
1 ou 2	7	1 ou 2	3	8) ou 7)
3	7	3	3	6)
4 ou 7	7	4 ou 1	4	6)
5 ou 6	7	3 ou 2	4	4)

11) (0, 3, 5, 6) :

Si A prend ... allumettes	dans la ligne de ...,	J prend ...	dans la ligne de ...	Position finale
1	3	1	5	8)
2	3	2	6	7)
3	3	1	6	6)
1	5	1	3	8)
2 ou 5	5	6 ou 3	6	6)
3 ou 4	5	5 ou 4	6	4)
1	6	3	3	6)
2	6	2	3	7)
3 ou 6	6	5 ou 2	5	6)
4 ou 5	6	4 ou 3	5	4)

12) (1, 3, 5, 7) :

Si A prend ... allumettes	dans la ligne de ...,	J prend ...	dans la ligne de ...	Position finale
1	1	1	3	9)
1	3	1	1	9)
2	3	2	7	6)
3	3	3	7	7)
1	5	1	1	10)
2 ou 4	5	6 ou 4	7	6)
3 ou 5	5	7 ou 5	7	4)
1	7	1	1	11)
2	7	2	3	6)
3	7	3	3	7)
4 ou 6	7	4 ou 2	5	6)
5 ou 7	7	5 ou 3	5	4)



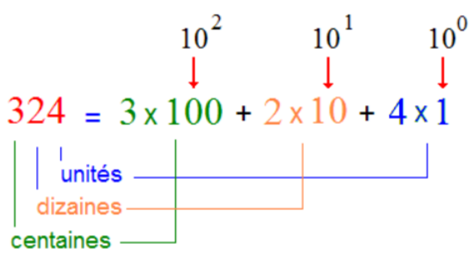
Voici tous les types de positions perdantes avec une option, parfois il y en a plusieurs mais une suffit, que vous avez pour répondre à chaque coup de votre adversaire. Comme vous l'avez sûrement remarqué, la 12^{eme} est également la position de départ et donc celui qui commence perd forcément si son adversaire joue bien (ne commet pas d'erreur).
Pour conclure cette partie expérimentale, nous pouvons affirmer qu'en apprenant les positions de cette liste vous détenez la clé de la victoire et il vous suffira de toujours mener votre adversaire dans une de ces positions. Le principal défaut de cette méthode est que cette liste n'est vraiment utile que pour ce jeu de Marienbad et non pas pour les jeux de Nim en tas en général.

3.2 Solution binaire

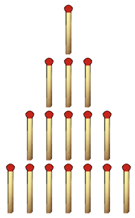
Maintenant que nous avons étudié ce jeu expérimentalement et trouvé toutes ses types de positions perdantes, nous allons tenter de comprendre cette première stratégie gagnante qui fonctionne quelle que soit la position initiale, tant qu'il y a une quantité finie et entière d'allumettes réparties en un certain nombre de tas. Évidemment, elle ne fonctionne que si nous nous trouvons en position gagnante.
Cette solution repose sur le système binaire autrement dit en base 2. Il est différent de celui que nous utilisons tous les jours (le système décimal ou en base 10) mais il fonctionne exactement de la même manière. La base détermine le nombre de chiffres que l'on utilise. Par exemple la base 10 en prend 10 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ; la base 5, 5 (0, 1, 2, 3, 4) et donc le système binaire n'en compte que 2 : 0 et 1.
N'importe quel nombre naturel peut être décomposé avec les différents systèmes de numérotation mais il sera noté différemment en fonction des bases bien que l'idée pour trouver comment l'écrire reste toujours la même.
Elle fonctionne selon le principe suivant :

- Pour commencer, nous prenons la base b ($b \in \mathbb{N}$) et l'élevons avec le plus grand exposant entier positif n possible tel que b^n est plus petit ou égal au nombre initial.
- Ensuite, il s'agit de multiplier b^n avec un nombre entier $a_n \geqslant 0$, à nouveau le plus grand possible, tel que $a_n \cdot b^n$ est inférieur ou égal à notre nombre ($a_n < b$).
- Nous devons soustraire au nombre initial celui que nous avons obtenu précédemment, soit $a_n \cdot b^n$. Nous pouvons à présent recommencer au premier point avec ce nombre obtenu mais en changeant les n par $n-1$ et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivons à 0.
- Finalement, pour avoir le nombre choisi écrit en base b, nous n'avons plus qu'à mettre en ligne les différents coefficients a_i dans l'ordre où nous les avons trouvés. Notre nombre en base b est donc $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$.

Pour illustrer ce point, voici un schéma représentant 324 en base 10 tel que nous le connaissons en montrant comment fonctionne ce principe. Sur cette illustration, le 10 de 10^2, 10^1 et 10^0 représente la base dans laquelle nous comptons. Pour obtenir 324 en binaire, il faut donc remplacer ces 10 par des 2 ainsi que les élever à une certaine puissance avec un coefficient plus élevé selon la méthode ci-dessus. Cela nous donne :
$1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
$= a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0 = \mathbf{101000100}$



Nous sommes à présent capables d'écrire les nombres sous la forme binaire et ainsi de comprendre quel lien existe entre une stratégie gagnante et cette écriture binaire. Pour parvenir à cette stratégie, il faut commencer par décomposer les nombres des différentes lignes dans le système binaire. Prenons par exemple la position initiale :



$\rightarrow$	1 allumette	$= 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	$= 001$
$\rightarrow$	3	"	$= 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	$= 011$
$\rightarrow$	5	"	$= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	$= 101$
$\rightarrow$	7	"	$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	$= 111$

que nous pouvons également écrire sous la forme de **matrice**. Une matrice $(n \times m)$ est un tableau composé de n lignes et m colonnes dont a_{ij} représente le croisement de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne (bien évidemment : n, m, i et $j \in \mathbb{N}$). Dans l'exemple ci-dessous, $a_{32} = 0$.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour avoir la stratégie gagnante, mettre tous les nombres d'allumettes en binaire ne suffit pas ; il faut également appliquer une opération particulière : la **somme digitale** (qui se note $\oplus$). C'est un procédé de sommation dont le résultat dépend du nombre de **1** que compte chaque colonne. Si le nombre de 1 est pair, la somme digitale de la colonne donnera 0 et s'il est impair, elle sera égale à 1. Autrement dit, la somme digitale est l'addition des chiffres d'une colonne modulo 2. Nous la noterons sd_j car elle représente la somme digitale de la j^{eme} colonne et donc :

$$\forall j \leq m : sd_j = (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) mod 2$$

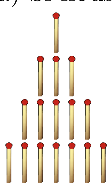
Pour obtenir la somme digitale finale, soit des différents tas d'allumettes, il faut calculer sd_j pour chacune des colonnes et ensuite les mettre côte à côte de sd_1 jusqu'à sd_m.
Cela nous donne :

$$a_{11}a_{12}...a_{1m} \oplus a_{21}a_{22}...a_{2m} \oplus ... \oplus a_{n1}a_{n2}...a_{nm} = sd_1 sd_2 ... sd_m$$

La somme digitale possède les propriétés suivantes (en reprenant la notation de notre nombre en base 2 de la page précédente) :

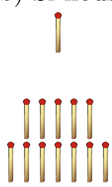
- *Associative*: $(a_n...a_1a_0 \oplus b_n...b_1b_0) \oplus c_n...c_1c_0 = a_n...a_1a_0 \oplus (b_n...b_1b_0 \oplus c_n...c_1c_0)$
- *Commutative*: $a_n...a_1a_0 \oplus b_n...b_1b_0 = b_n...b_1b_0 \oplus a_n...a_1a_0$
- *Possède un élément neutre*: $a_n...a_1a_0 \oplus 0 = a_n...a_1a_0$
- *Chaque nombre naturel à un opposé*: $\forall a_n...a_1a_0 \in \mathbb{N}, \exists a'_n...a'_1a'_0 \in \mathbb{N} : a_n...a_1a_0 \oplus a'_n...a'_1a'_0 = 0$

a) Si nous prenons la position initiale, cela donne :



$$\begin{array}{rccc} & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

b) Si nous retirons les 3 allumettes, nous obtenons :

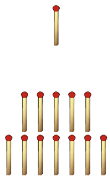


$$\begin{array}{rccc} & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

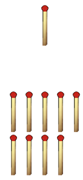
La somme digitale binaire de 1, 3, 5 et 7 vaut 0 tandis que celle de 1, 5 et 7 vaut 3.
D'après l'analyse de ce jeu par Charles Bouton[5], la stratégie gagnante réside dans le résultat de la somme digitale. Comme nous l'avons vu dans la partie expérimentale, la position initiale est perdante et elle

5. Charles Leonard Bouton (1869 - 1922) est un mathématicien américain qui fut le premier à résoudre entièrement les jeux de Nim. Cette avancée constitue une partie fondamentale de la théorie des jeux combinatoires.

a une somme digitale nulle. S'agit-il d'une simple coïncidence ? Non ! Nous pouvons observer un point commun entre les positions perdantes : leurs sommes digitales sont égales à 0. En effet, mis à part les positions perdantes 1) et 2) qui sont (0, 0, 0, 1) et (0, 1, 1, 1), toutes les autres positions perdantes ont une somme nulle.
Par exemple, pour les positions perdantes symétriques (comme (1, 1, 3 ,3), (1, 1, 5, 5), ...), il suffit d'utiliser la 4^{eme} propriété de la somme digitale. Étant donné que cet opposé s'avère être le même nombre, c'est-à-dire que si $a_n ... a_1 a_0 = 10110$ alors $a'_n ... a'_1 a'_0 = 10110$, cela implique que cette somme de deux nombres identiques donnera forcément 0 et donc il en va de même pour plusieurs paires de nombres égaux. Pour les autres positions perdantes, il faut faire leur somme digitale pour s'en persuader.
La **stratégie gagnante** basée sur le système de numération binaire consiste donc à passer d'une position à somme digitale non-nulle à une position avec une somme nulle ; c'est-à-dire à annuler le coup de l'adversaire. Pour illustrer cette stratégie, nous allons reprendre l'exemple ci-dessus. Notre adversaire commence et retire les 3 allumettes. Nous nous trouvons donc dans une position gagnante donc notre objectif est de revenir à une somme digitale nulle. Nous devons parvenir à transformer les deux 1 du résultat et, pour ce faire, nous n'avons qu'une solution : retirer 3 des 7 allumettes. Cela mènera à la position perdante 7) :



$$\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



A partir de là, il sera contraint de retirer au moins une allumette et donc de modifier la somme digitale qui deviendra non-nulle et ainsi de suite jusqu'à ce que nous puissions le pousser dans une position perdante 1) ou 2) afin de gagner la partie.

3.2.1 Théorème de Bouton

Cette stratégie gagnante est appuyée par un théorème prouvé en 1901 par le mathématicien Charles Bouton. Il affirme que, si la position dans laquelle se trouve un joueur possède une somme digitale non-nulle, alors il se trouve en position gagnante ; sinon ce sera son adversaire qui sera en position gagnante.

Démonstration :

Soit x_1 le nombre d'allumettes de la première ligne en représentation binaire, x_2 celle de la deuxième, ... et x_n celle de la n^{ieme} rangée ainsi que y_1, y_2, ... et y_n ceux de ces différentes lignes après qu'une personne ait joué. Soit la somme de base $sd_b = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ et la somme finale $sd_f = y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_n$.
Admettons que le joueur prenne une/des allumette(s) dans la ligne k: $\forall i \neq k, x_i = y_i$ tandis que $x_k > y_k$.
En appliquant les propriétés de $\oplus$ (associativité, commutativité et que $x_i \oplus x_i = 0$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} sd_f &= 0 \oplus sd_f \\ &= sd_b \oplus sd_b \oplus sd_f \\ &= sd_b \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_n \\ &= sd_b \oplus (x_1 \oplus y_1) \oplus (x_2 \oplus y_2) \oplus \cdots \oplus (x_n \oplus y_n) \\ &= sd_b \oplus 0 \oplus \cdots \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus \cdots \oplus 0 \\ &= sd_b \oplus x_k \oplus y_k \ (1) \end{aligned}$$

La démonstration se fait par récurrence à partir des 2 lemmes suivants.

Lemme 1: Si $sd_b = 0$, alors $sd_f \neq 0$ pour toutes les options qui ont pu être jouées.
Dit autrement : si un joueur se trouve en position perdante, alors tous ses coups mèneront son adversaire en position gagnante.
Démonstration: Comme $sd_b = 0$, alors $sd_f = x_k \oplus y_k$ (1) ; si le joueur modifie le nombre d'allumettes dans la ligne k et étant donné que $x_k \neq y_k$, alors $sd_f \neq 0$.

Lemme 2: Si $sd_b \neq 0$, alors il existe une option qui permet d'obtenir $sd_f = 0$.
Cela signifie que si nous sommes en position gagnante, il existe au moins un coup qui nous permet de mettre notre adversaire dans une position perdante.
Démonstration: soit d la position du premier chiffre (ou bit) non-nul de sd_b en commençant par la gauche. Prenons k tel que le d^{ieme} bit x_k est également non-nul (k existe sinon le d^{ieme} bit de sd_b vaudrait 0). Posons $y_k = sd_b \oplus x_k$. Nous avons $y_k < x_k$. Tous les bits se trouvant à gauche de d sont semblables dans x_k et y_k. Le d^{ieme} bit qui est un 1 se modifie en 0 en faisant diminuer la valeur de 2^d. Peu importe

quels sont les changements qui sont apportés sur les bits à droite de d, ils ne créeront en aucun cas un changement supérieur à 2^{d-1}. Celui qui joue est en mesure de prendre $x_k - y_k$ allumettes de la ligne k et donc :

$$\begin{aligned} sd_f &\overset{(1)}{=} sd_b \oplus x_k \oplus y_k \\ &= sd_b \oplus x_k \oplus (sd_b \oplus x_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

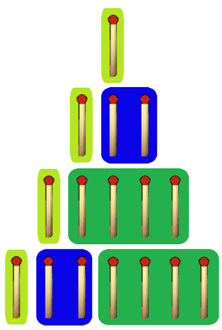
Étant donné que ce deuxième lemme n'est pas forcément facile à comprendre, nous allons l'illustrer en prenant un exemple représentant une position d'un jeu de Nim à tas composé de 6 rangées de 7, 10, 13, 9, 3 et 9 allumettes. Sous la forme de somme digitale, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

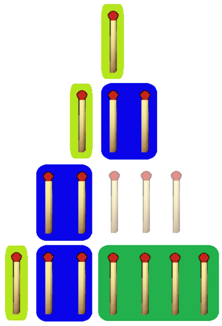
Si nous revenons à la démonstration, le premier bit non-nul de sd_b est le 1 de la troisième colonne. Nous la nommons donc la d^{ieme} colonne (en rouge). Parmi les lignes de cette d^{ieme} colonne, nous devons choisir la ligne x_k de manière à ce que le d^{ieme} chiffre soit 1. Prenons par exemple la deuxième ligne en tant que x_k(en bleu). Nous avons $y_k = sd_b \oplus x_k = 1001$. En effet, les 2 premiers bits de x_k et y_k sont identiques. Finalement, si nous retirons $x_k - y_k = 0011$ (= 3 en chiffre décimal) allumettes de la ligne k, $sd_f = 0$ car $x_k - y_k = sd_b$.

3.3 Stratégie par regroupements mentaux

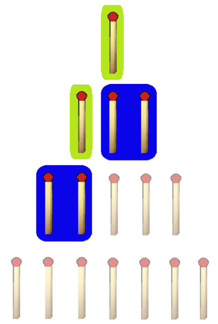
Bien que la solution binaire fonctionne parfaitement, elle reste néanmoins peu pratique étant donné qu'il faut bien maîtriser le comptage en binaire pour être efficace. De plus, pourquoi devrait-on se compliquer la tâche en apprenant à compter dans un autre système de numération alors que l'on peut simplement essayer de se représenter un peu différemment les éléments à notre disposition ? Cette stratégie n'exclut pas réellement le binaire ; disons plutôt qu'elle permet de l'utiliser sans que nous nous en rendions compte. Pour mettre cette stratégie en place, il faut dans un premier temps séparer mentalement chaque ligne de la position initiale en plusieurs groupes de 1, 2 ou 4 allumettes. Il ne faut néanmoins pas le faire aléatoirement mais tenter de n'avoir que des groupes de nombres différents par ligne. Pour ce faire, nous devons commencer par placer des groupes de 4, puis faire ceux de 2 et finir avec les allumettes restantes par les groupes de 1. Cela nous donne la disposition suivante :



Cette stratégie consiste à toujours essayer de faire en sorte que, à la fin de notre tour, le nombre de chaque groupement soit pair et donc que notre adversaire se retrouve dans une position perdante. Comme nous pouvons le constater, c'est le cas pour la position initiale qui est une position perdante. A présent, notre adversaire va jouer et donc modifier la parité des groupements. Admettons qu'il prenne 3 des 5 allumettes :



En jouant ce coup, la parité de tous les regroupements change car ils deviennent tous impairs (3 groupes de 1, 3 groupes de 2 ainsi que 1 de 4). Afin de rétablir la parité dans ces groupements pour maintenir l'avantage, nous devons prendre l'option qui nous permettra d'annuler son coup. Étant donné qu'il nous est impossible d'avoir 2 groupes de 4, nous sommes obligés de défaire ce groupe en retirant des allumettes de la dernière ligne. Si nous n'en enlevons que 4, il nous restera un problème : les regroupements de 1 et de 2 seront au nombre de 3 donc il faudra encore prendre 3 allumettes de plus afin qu'ils soient en nombre pair. Nous devrons alors retirer du jeu toute la ligne de 7 pour obtenir :



Notre adversaire se retrouve dans la position perdante 4) et, comme nous l'avons vu dans la section expérimentale, nous gagnerons la partie et ceci sans avoir dû faire de conversions de nombres en binaire.

3.4 Généralisation

Ces deux stratégies sont également valables pour la version **classique** de ce jeu où le joueur prenant la dernière allumette gagne la partie. Néanmoins, il y a quand même une petite différence :

- Les positions perdantes (0, 0, 0, 1) et (0, 1, 1, 1) de la version **misère** deviennent gagnantes et elles sont remplacées par les situations (0, 0, 1, 1) et (1, 1, 1, 1).

Ainsi, dans la version classique, la totalité des positions perdantes possède une somme digitale nulle.

Nous pouvons élargir le cas de ce jeu de Marienbad à un jeu plus général qu'est le **jeu de Nim à tas**. Ce dernier fonctionne exactement de la même manière que le jeu de Marienbad sauf que la position initiale n'est pas forcément (1, 3, 5, 7) et peut donc également être une position gagnante. Elle est composée d'un nombre fini de tas, chacun composé d'une certaine quantité d'allumettes, cette quantité pouvant varier d'un tas à l'autre.
Soit k le nombre total d'allumettes réparties en m tas, k_i ($i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$) représente le nombre d'allumettes du i^{eme} tas ; nous écrirons $k_1, k_2, ..., k_m$ en binaire. Il existe un $a_{ij} \in \{0, 1\}$ tel que :

$$k_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} 2^j \qquad \text{avec n la plus haute puissance de 2 inférieure à } k_i.$$

L'ensemble des $k_1, k_2, ..., k_m$ représente une position que nous pouvons écrire sur la forme de matrice A comportant m lignes et $n + 1$ colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{10} \\ a_{2n} & \cdots & a_{20} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & \cdots & a_{m0} \end{bmatrix}$$

Pour $j \in [0, n]$, soit sd_j la somme digitale de la colonne $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$:

$$sd_j = (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}) mod\ 2$$

Si nous répétons cette opération $\forall j \in \{0, 1, ..., n\}$, nous obtenons la somme digitale de cette position. Elle nous permettra de définir cette position en tant que perdante ou gagnante selon que le résultat de la somme est nul ou pas. De plus, s'il s'agit de la position initiale, nous serons en mesure de déterminer si nous devons commencer ou laisser la main à notre adversaire et ainsi sceller l'issue de la partie !

Chapitre 4

Théorie des graphes

Dans les jeux de Nim en général, bien que le nombre total de positions possibles peut être extrêmement élevé, il reste néanmoins fini. Cela rend possible la construction d'une structure mathématique représentant l'ensemble des options qui s'offrent à un joueur dans n'importe quelle situation de la partie : le **graphe**. Afin de mettre en évidence de manière plus concrète le concept de positions gagnantes et perdantes, nous allons utiliser la **théorie des graphes** ainsi que plus spécifiquement la définition du **noyau d'un graphe**.

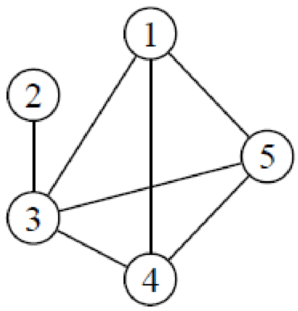
4.1 Notions fondamentales

Commençons à introduire ces graphes à l'aide de quelques définitions[6]. Il existe 2 principales sortes de graphes :

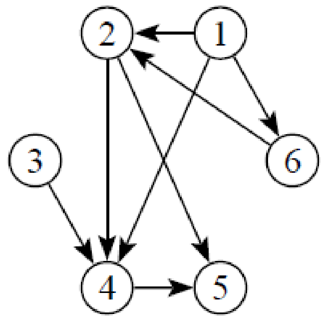
a) Un **graphe** fini **non-orienté** $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets** (*Vertices* en anglais), et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ dont les éléments sont appelés **arêtes** (*Edges* en anglais).

b) Un **graphe** fini **orienté** ou **digraphe** est également défini par l'ensemble fini des **sommets** $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et par un ensemble fini $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ sauf que les éléments de l'ensemble E sont des **arcs**.

La différence entre ces deux types de graphes réside dans la nuance entre une arête et un arc. Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire non-ordonnée de sommets appelés extrémités ; tandis qu'un arc e de E est défini par une paire ordonnée de sommets. Si nous prenons $e = (u, v)$, nous disons que l'arc va de u vers v. Autrement dit, u est l'extrémité initiale de e et v l'extrémité finale.



(a) Graphe non-orienté



(b) Graphe orienté

Dans ce chapitre, nous ne traiterons que des graphes **orientés**; étant donné que dans les jeux de Nim nous pouvons passer d'une position u à un position v mais nous ne pouvons en aucun cas revenir de v vers u.

L'**ordre** d'un graphe représente le nombre total de sommets que comporte ce graphe.
Le **degré** d'un sommet v du graphe orienté se décompose en deux parties :

- Le nombre d'arcs qui ont comme extrémité initiale le sommet v. Cela donne le **degré extérieur** du sommet en question que l'on écrit $d^+(v)$.

- Le nombre d'arcs qui ont comme extrémité finale le sommet v. Cela donne le **degré intérieur** du sommet en question que l'on écrit $d^-(v)$.

Au final, nous obtenons le degré du sommet v:

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v).$$

6. https ://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/graphes.pdf

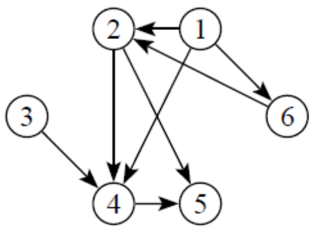
Dans ce type de graphes qui concernent les jeux de Nim, les notions de **chemins** ainsi que de **circuits** jouent un rôle capital.

Un **chemin** allant d'un point a à un point b est constitué d'une suite alternée de sommets et d'arcs. Il commence et se finit toujours par un sommet (par convention, un chemin comporte au minimum un arc). Ainsi tout arc du chemin est entouré par deux sommets dont un sommet initial et un final. Bien évidemment, nous ne pouvons pas prendre un arc à rebours pour créer un chemin.
La **distance** qui sépare deux sommets d'un digraphe représente la longueur du chemin le plus court qui les joint. Nous la noterons $d(v_i, v_j)$. S'il est impossible d'aller d'un sommet v_m à v_n, nous écrirons $d(v_m, v_n) = \infty$. Dans le graphe orienté ci-dessus, $d(3,4) = 1$, $d(1,5) = 2$, $d(5,2) = \infty$ et ainsi de suite.

Les **circuits** sont une sorte de chemins dans lesquels le sommet d'origine ainsi que le sommet final sont le même. Par exemple, le digraphe ci-dessus ne possède aucun circuit.

Les circuits possèdent une propriété qui caractérise la base même des jeux de Nim. *Tout digraphe fini sans circuit est progressivement fini.* "Progressivement fini" signifie que le jeu se termine forcément ; donc il y aura dans tous les cas un gagnant et un perdant. En effet, contrairement aux échecs par exemple, cette propriété s'avère vraie pour les jeux de Nim (et les jeux combinatoires en général).

Il est possible de représenter les digraphes de manière non-graphique mais sous la forme de matrices. En faisant la matrice du digraphe, nous avons :



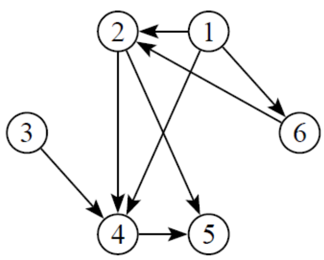
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, les lignes représentent les différents sommets ; il en va de même pour les colonnes. On met donc en relation chaque sommet du digraphe avec tous les sommets de celui-ci. Pour construire une ligne, il suffit de prendre un sommet et de regarder avec quels autres sommets il est relié par un arc. S'il y a un arc, nous écrirons 1 dans la colonne du sommet final ; tandis que nous mettrons un 0 si ce n'est pas le cas. Par exemple, dans la première ligne de la matrice ci-dessus, le sommet ① est le sommet initial des arcs le mettant en relation avec les sommets ②, ④ et ⑥ donc il y a un 1 dans les colonnes 2, 4 et 6 de la matrice.

La matrice de ce digraphe possède les propriétés suivantes :

- Elle est composée d'autant de lignes que de colonnes.
- Il n'y a que des 0 sur la diagonale (qui va du sommet à gauche au fond à droite). Pour qu'il y ait un 1 sur cette diagonale, le digraphe doit nécessairement comporter au moins une boucle.
- Elle n'est pas symétrique ; pas comme celle des graphes non-orientés qui ont des arrêtes à la place des arcs (ceux-ci ont cette même diagonale comme axe de symétrie).
- Chaque digraphe ne peut être représenté que par une unique matrice qui n'est la matrice d'aucun autre digraphe.

Une deuxième manière de représenter un digraphe sont les **listes d'adjacences**. Elles consistent à donner pour tous les sommets du graphe ceux auxquels nous pouvons accéder en suivant les différents arcs (ceux qui se trouvent à une distance de 1 en suivant le sens des flèches). En faisant les listes d'adjacences de notre digraphe, nous obtenons :



1 : 2, 4, 6
2 : 4, 5
3 : 4
4 : 5
5 : –
6 : 2

Ces listes d'adjacences sont bien plus utiles pour traiter des jeux de Nim que les matrices étant donné que nous voyons clairement, à partir d'une position, quelles sont toutes les options qui s'offrent à nous.

4.2 Graphes associés aux jeux de Nim

Comme expliqué dans la première partie de ce chapitre, tout jeu de Nim peut être représenté par un unique digraphe progressivement fini. Pour un certain jeu, la structure du graphe dépend du nombre de tas initial, de la quantité d'allumettes par tas ainsi que des règles imposées aux joueurs : il peut donc devenir extrêmement complexe.

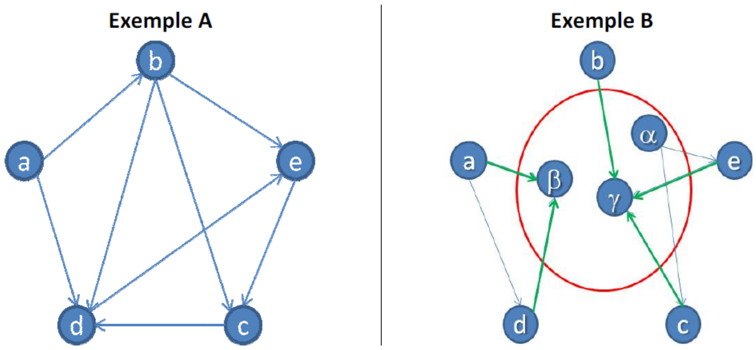
Dans un graphe G associé à un jeu de Nim, nous appellerons x une certaine position possible au cours de la partie et y une image de x; tel qu'à partir de la position x, nous puissions jouer un coup arrivant dans la position y. Nous écrirons $\Gamma(x)$ l'ensemble des images de x et donc $y \in \Gamma(x)$.
Autrement dit, chaque position x du jeu de Nim est représentée par un sommet du graphe, y représente un autre sommet si celui-ci est une option qui s'offre au joueur en position x et $\Gamma(x)$ représente l'ensemble des options qu'a le joueur en position x.

Le **noyau** K du graphe orienté G est un sous-ensemble constitué d'une partie des sommets de G. Pour que ces sommets appartiennent au noyau, ils doivent vérifier les deux propriétés suivantes :

1) $x \in K \Rightarrow \Gamma(x) \cap K = \emptyset$

2) $x \notin K \Rightarrow \Gamma(x) \cap K \neq \emptyset$

Cela signifie que la position x appartient au noyau si parmi toutes ses images, aucune d'entre elles n'appartient au noyau et que si x n'est pas dans le noyau, il a au moins une image qui appartient au noyau.



Dans l'exemple A, la première propriété est vérifiée par les sommets a et e car ils n'ont pas d'arc les reliant. Est-ce également le cas pour la deuxième propriété ? Non ! Les sommets b et d n'appartiennent pas au potentiel noyau et ont bien un arc les menant à a ou e mais le sommet c n'en a aucun. L'exemple A ne possède donc pas de noyau.

Sur l'exemple B, le noyau comprend les sommets α, β et γ. Pour en être persuadé, il suffit de montrer que les deux propriétés sont vraies. Comme nous pouvons le remarquer sur le digraphe, aucun arc ne relie ces sommets entre eux et tous les autres sommets ont au moins un arc créant un chemin vers un élément du noyau.

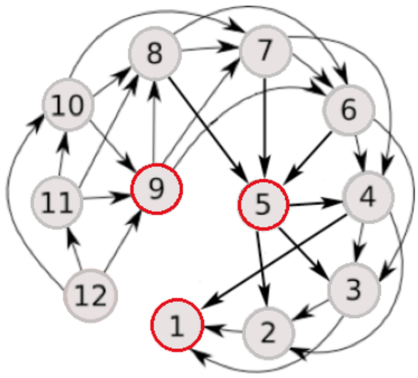
En mettant en lien les propriétés du noyau d'un graphe avec les positions d'un jeux de Nim, nous pouvons observer que les positions perdantes vérifient la première propriété, et les positions gagnantes la deuxième. Ainsi l'ensemble des positions perdantes est le noyau du graphe associé à ce jeu de Nim. Toutes les stratégies gagnantes des jeux de Nim consistent donc à retourner à chaque coup dans le noyau du graphe ; ce n'est que la tactique pour y arriver qui peut changer entre les différents jeux.

Pour le graphe d'un jeu de Nim, le principe de construction est simple mais peut demander un travail très important :

- La première étape consiste à représenter toutes les positions possibles au cours d'une partie par un sommet ; en ne mettant qu'un seul sommet pour des positions semblables. Par exemple, dans le jeu de Marienbad, nous dessinerons le sommet 123 pour les positions (1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 1, 2), ...

- La deuxième partie, celle qui prend le plus de temps, est la construction des arcs. A partir d'une certaine position x d'origine, il faut tracer un arc vers chaque sommet de $\Gamma(x)$ et ainsi de suite pour toutes les positions.

Par exemple, pour le jeu de Nim en ligne en version misère avec 12 allumettes où un joueur peut retirer entre 1 et 3 allumettes, voici le graphe correspondant.

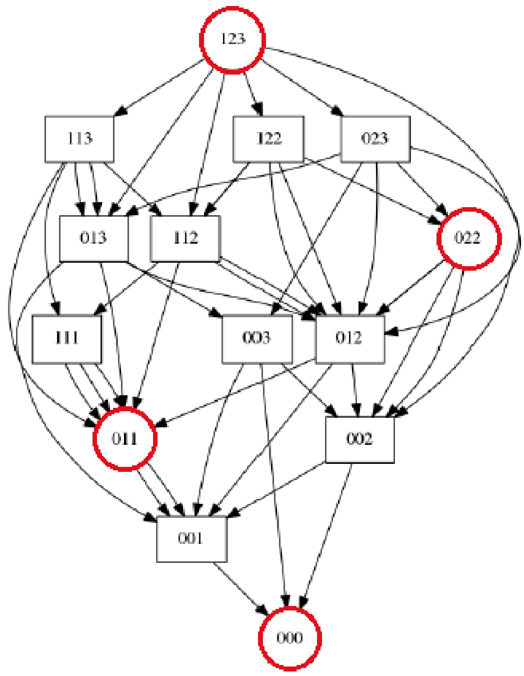


A partir de ce digraphe, à l'aide de tous les éléments vus précédemment, nous pouvons comprendre comment fonctionne ce jeu de manière plus concrète.

Premièrement, trois arcs partent de chaque sommet, sauf pour les sommets 1 et 2 (le 3 n'en a que deux mais le troisième est sous-entendu car le sommet 0 n'est pas représenté sur ce graphe). Ils représentent le nombre d'allumettes retirée par le joueur. Ensuite, nous voyons que le graphe est progressivement fini étant donné qu'il n'y a aucun circuit puisque le joueur prend un nombre entier strictement positif d'allumettes. En revenant à la définition du noyau d'un graphe, nous pouvons remarquer que les sommets en rouge sont les positions perdantes.
Le sommet 1 est bien évidemment une position perdante car celui qui la prend perd. Pour le sommet 5, tous les arcs mènent vers des sommets n'appartenant pas au noyau et les trois sommets précédents (6, 7 et 8) possèdent un arc allant jusqu'à lui. Il en va de même pour le sommet 9. De plus, aucun arc ne relie les sommets du noyau.

En pratique, la position initiale n'appartient pas au noyau donc le joueur qui commence prendra 3 allumettes pour rentrer dans le noyau. Son adversaire pourra jouer un coup aléatoire car il est contraint de sortir du noyau ; il retirera par exemple 2 allumettes et finira sur le sommet 7. Le joueur n'aura qu'à en enlever 2 à son tour pour retourner dans le noyau. Encore une fois, peu importe ce que fera son adversaire, il sera assuré de pouvoir revenir au sommet 1 et de gagner la partie.

Bien entendu, nous pouvons faire un tel graphe pour le jeu de Marienbad puisqu'il est possible de représenter tous les jeux de Nim par un graphe ; mais nous ne le ferons pas car son illustration serait bien trop complexe. Contrairement au graphe ci-dessus, il comporterait beaucoup plus de sommets étant donné que le jeu de Marienbad contient 384 positions spécifiques ; donc même en regroupant en un sommet les positions semblables, le nombre de sommet resterait trop important. De plus, le plus haut degré d'un sommet du graphe ne se limiterait pas à 6 (3 arcs qui arrivent au sommet et 3 autres qui en partent). Afin de mieux se rendre compte de la complexité d'un tel graphe, il suffit de comparer le nombre de coups que peut exécuter le joueur qui commence.
Comme nous pouvons le voir sur le graphe ci-contre qui représente un jeu de Nim à tas avec (1, 2, 3) pour position initiale, le joueur peut accéder à 6 positions qui sont toutes gagnantes (les positions perdantes sont en rouge). Pour donner un ordre d'idée, dans le jeu de Marienbad, il peut jouer 16 coups différents ! Donc le degré extérieur maximal d'un tel graphe ne serait pas 6 mais 16. En ajoutant 10 arcs sortant à la position initiale, il devient évident qu'un tel graphe est incompréhensible.



Chapitre 5

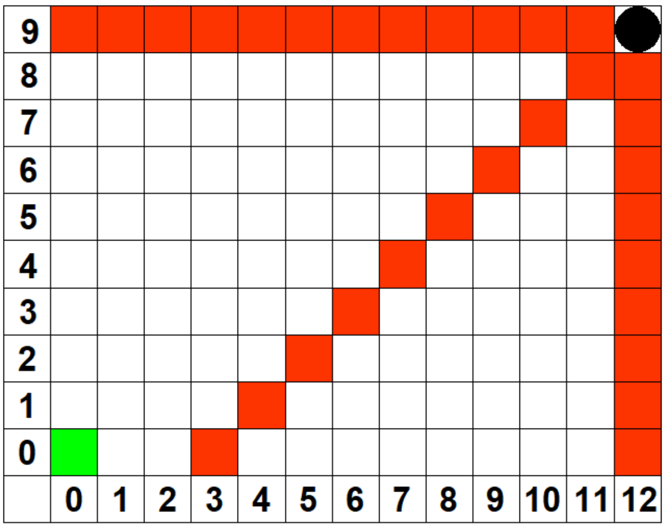
Jeu de Wythoff

5.1 Présentation et noyau

Le jeu de Wythoff, également connu sous les noms de ”Coincez la reine”, ”Jeu des 2 tas d’or” ou encore ”Dornim”, est un jeu de Nim dans lequel les deux joueurs qui s’affrontent ont devant eux 2 tas, chacun composé d’un nombre (en principe différent) d’allumettes. Les règles autorisent les joueurs à en retirer le nombre de leur choix dans un seul tas ou d’en prendre autant dans chacun des tas. Le joueur prenant la dernière allumette remporte la partie. A première vue, ce jeu ressemble fortement à un jeu de Nim à tas composé de 2 tas mais il comporte une différence qui modifie totalement la stratégie à adopter pour gagner.

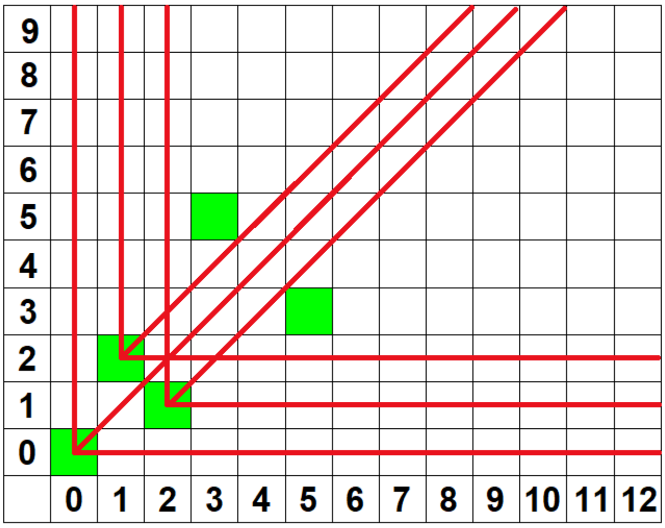
Dans le jeu de Nim à tas, le joueur qui commence est en position gagnante sauf si les 2 tas sont égaux car la somme digitale des tas serait nulle et il perdrait donc la partie. Si ce n’est pas le cas, il fait en sorte de laisser le même nombre d’allumettes dans chaque tas et, à partir de son prochain tour et jusqu’à la fin de la partie, il ne devra que retirer autant d’allumette que son adversaire mais dans l’autre tas pour gagner.
Dans le jeu de Wythoff, la règle qui stipule que l’on peut retirer un nombre égal d’allumettes dans les deux tas rend la stratégie ci-dessus impossible puisque, dès que les deux tas ont le même nombre d’allumettes, celui qui doit jouer peut toutes les prendre et gagnerait directement la partie. Il faudra donc utiliser une autre stratégie.

Nous noterons une certaine position (x, y) (l’ordre n’est pas important car (x, y) et (y, x) sont semblables), x et y représentant le nombre d’allumettes de chaque tas.
Afin de rendre ce jeu plus compréhensible, nous ne l’illustrerons pas sous la forme de 2 tas d’allumettes mais sous la forme d’un quadrillage dont les coordonnées correspondent au nombre d’allumettes de chaque tas et la position final (0, 0) se situe en bas à gauche. Les cases en rouge illustrent toutes les options qui s’offrent au joueur. Voici ce que cela donne pour 2 tas de 9 et 12 allumettes.



La case en vert (0, 0) est la position à atteindre pour gagner. Suite aux premières observations, il est évident que les cases (0, x), (x, 0) ainsi que (x, x) permettent d’y arriver ; ce sont donc des positions gagnantes. Nous devons donc chercher quelles cases forcent notre adversaire à déplacer le pion sur celles-ci.
La première position perdante est la case (1, 2) et donc également la case (2, 1) qui est sa case symétrique par rapport à la droite formée par les cases (x, x) (par la suite, nous ne traiterons que celle qui se trouve au dessus de cette diagonale). Pour s’en persuader, il suffit de regarder quelles cases sont atteignables à partir de cette case : (0, 2), (1, 1) et (1, 0) qui sont toutes des positions gagnantes.
Pour trouver les autres cases du noyau, et donc les autres positions perdantes, nous devons tracer l’en-

semble des cases à partir desquelles nous pouvons arriver à une des positions du noyau. Graphiquement, nous obtenons :



Nous constatons que la case non barrée la plus proche de la situation finale est (3, 5) ; c'est donc une position perdante. Nous pouvons recommencer ces actions pour les cases (3, 5) et (5, 3) pour obtenir les 2 cases suivantes du noyau et ainsi de suite pour trouver toutes les positions perdantes. Cette méthode reste malgré tout peu efficace. Imaginons que les coordonnées de la case initiale soit (150, 172) ; le temps que nous passerions à trouver tous les éléments du noyau serait bien trop élevé. C'est pourquoi Wythoff[7], en étudiant ce jeu, a développé un tableau les représentant :

Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n
x	0	1	3	4	6	8	9	11	12	...	x_n
y	0	2	5	7	10	13	15	18	20	...	y_n

La construction de ce tableau est assez simple à comprendre. La première ligne représente le rang de la position perdante, en commençant par 0. Autrement dit, il indique où se situe une certaine position perdante par rapport aux autres membres du noyau qui sont aussi dans la partie au-dessus de la droite (x, x). Par exemple, la case (1, 2) est la première position perdante à droite de (0, 0) ; elle se verra donc attribuer le rang 1.
La seconde ligne se compose de la suite (x_n) dont l'élément x_i est le plus petit entier naturel qui ne figure pas précédemment dans les 2^{eme} et 3^{eme} lignes du tableau. Par exemple, pour le rang $i = 5$, $x_5 = 8$ car les chiffres de 1 à 7 figurent déjà dans les 5 colonnes à sa gauche.
Finalement, pour trouver les y_i de la suite (y_n), il suffit d'additionner le rang de la case à sa composante x_i. Pour $i = 7$, $y_7 = 11 + 7 = 18$.

En résumé, $y_n = x_n + n$. Si nous posons $x_0 = 0$, nous pouvons définir x_n par récurrence comme étant le plus petit élément de $\mathbb{N}$ n'appartenant pas à l'ensemble : $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}\}$. De cette façon, tous les nombres entiers strictement positifs se trouvent une et une seule fois dans cet ensemble formé par les suites (x_n) et (y_n). Cela nous permet d'affirmer que dans chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale se trouve une unique case appartenant au noyau et donc, à partir d'une de ces cases, il est impossible d'en atteindre une autre ; au contraire, si nous ne nous trouvons pas sur l'une d'entre elles, nous avons la certitude de pouvoir en atteindre une. Nous obtenons ainsi une preuve que toutes ces cases sont effectivement des positions perdantes.

5.2 Suites de Beatty

Dans un cadre plus général, ces deux suites (x_n) et (y_n) portent le nom de suites de Beatty.

7. Willem Abraham Wythoff (1865 - 1939), mathématicien hollandais connu pour avoir étudié ce jeu

Par définition[8], la suite de Beatty associée à un irrationnel p est la suite des parties entières $\lfloor n \cdot p \rfloor$ des multiples non nuls $n \cdot p$, $(n > 0)$, de l'irrationnel p.
Lorsque p est un irrationnel strictement supérieur à 1, le nombre q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et aussi un irrationnel strictement supérieur à 1.
On montre alors par le théorème de Beatty (que nous ne démontrerons pas dans ce travail) que les deux ensembles (suites) de Beatty de bases p et q sont complémentaires dans $\mathbb{N}^*$.

Par exemple, dans notre jeu, Wythoff a montré que l'irrationnel p vaut le nombre d'or : $\varphi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1,618$, et que $q = \varphi^2 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2} \approx 2,618$. En remplaçant p et q par ces valeurs, l'égalité ci-dessus est vérifiée :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1$$

A présent, pour obtenir les premières composantes des éléments du noyau, nous n'avons qu'à appliquer $x_n = \lfloor n \cdot \varphi \rfloor$. Il nous reste à faire de même pour leur deuxième composante : $y_n = \lfloor n \cdot \varphi^2 \rfloor$ et ainsi obtenir les coordonnées des positions perdantes.

8. http ://jm.davalan.org/mots/suites/beatty/index.html

Chapitre 6

Conclusion

Lorsqu'on les découvre, les jeux de Nim n'ont l'air d'être que de simples jeux nécessitant peu de matériel et adaptés à tout public ; ils constituent une activité ludique et très simple à comprendre au niveau des règles des différents jeux. Cependant, ces jeux sont également un excellent moyen pour susciter la réflexion et amener les joueurs à améliorer leurs capacités déductives et logiques afin de trouver comment s'assurer de la victoire à tous les coups.

Le fait de traiter plusieurs jeux différents dans le cadre de ce travail a été source de motivation. Ces trois jeux m'ont montré que, bien qu'ils soient composés de quelques allumettes disposées en tas avec des règles simples et semblables, leurs méthodes de résolutions sont toutes sauf similaires ; je dirais même qu'elles n'ont que quelques rares éléments en commun dans la recherche déductive des positions perdantes. Ce fut d'ailleurs la phase la plus intéressante de l'étude de ces jeux : comprendre leur fonctionnement de base, procéder par élimination pour trouver quelques positions faisant partie du noyau, afin d'en déduire d'autres positions également perdantes...

Dans un second temps, trouver quelle(s) est/sont la/les stratégie(s) gagnante(s) m'a amené à faire des découvertes surprenantes, en dévoilant des applications pratiques des mathématiques auxquelles je n'aurais jamais pensé ou dont j'ignorais l'existence. Ainsi, le jeu de Nim en ligne m'a montré l'utilité pratique des modulos. Ce travail m'a également fait appréhender de nouvelles branches des mathématiques telles la numération binaire ou la théorie des graphes. Cette dernière s'avère être un outil très puissant pour résoudre des problèmes logiques ; ces graphes peuvent mener très rapidement à des solutions et peuvent trouver des applications concrètes dans certains exercices que l'on rencontre par exemple dans les concours des *Jeux mathématiques et logiques.*

Finalement, le principal défaut de ces jeux est qu'ils perdent de leur intérêt à partir du moment où nous connaissons la solution. Lorsque j'ai commencé ce travail, j'ai décidé d'appréhender ce thème de manière expérimentale comme expliqué dans la section à ce sujet. En jouant contre un robot qui gagne à tous les coups, il règne une sorte de mystère : comment fait-il pour gagner chaque partie ? pourquoi joue-t-il ce coup au lieu d'un autre ? quand ai-je fait un mauvais choix ? ... Mais d'une fois que nous connaissons la stratégie gagnante, ces interrogations ne se posent plus. Ainsi, où est le plaisir a jouer contre des adversaires si l'on gagne tout le temps ? Et s'ils connaissent également la solution, jouer contre eux n'a aucun sens car l'issue de la partie sera définie à l'instant même où l'on choisira qui commence.

Un grand MERCI à mon professeur accompagnant Michel Combe pour avoir proposé ce sujet passionnant ainsi que pour m'avoir accompagné tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier également M. Augustin Genoud pour m'avoir prêté l'ouvrage de M. Bouteloup [1] qui n'est malheureusement plus en vente.

Chapitre 7

Bibliographie

7.1 Support papier

1) BOUTELOUP, Jacques. *Les Jeux de Nim.* Édité par l'A.D.C.S., 1996.

2) GENOUD, Augustin. *Les Clefs des Énigmes Mathématiques.* Aux éditions LES CLEFS DU SAVOIR, 2013.

7.2 Support électronique

3) Charles L. Bouton. In : Wikipedia. Page Version ID : 804373171. 8 oct. 2017.
https : //en.wikipedia.org/w/index.php ?title=Charles_L._Bouton&oldid=804373171 (visité le 10/09/2018).

4) Classes modulo n - Homeomath.
http ://homeomath2.imingo.net/classem.htm (visité le 26/06/2018).

5) Jeu de Grundy. In : Wikipédia. Page Version ID : 128321448. 2 août 2016.
https ://fr. wikipedia.org/w/index.php ?title=Jeu_de_Grundy&oldid=128321448 (visité le 26/08/2018).

6) Jeu de Marienbad. In : Wikipédia. Page Version ID : 143331643. 9 déc. 2017.
https : //fr.wikipedia.org/w/index.php ?title=Jeu_de_Marienbad&oldid=143331643 (visité le 25/07/2018).

7) Jeu de Nim, Version Avec Options.
http ://nezumi.dumousseau.free.fr/im10/nim.html (visité le 29/06/2018).

8) Jeu Des bâTonnets Ou Jeu de Nim.
http ://www.jeuxpicards.org/batonnets/batonnetsnim.html (visité le 11/05/2018).

9) Jeux de Nim.
https ://interstices.info/jeux-de-nim/ (visité le 27/06/2018).

10) Jeux de Nim. In : Wikipédia. Page Version ID : 147799890. 23 avr. 2018.
https ://fr.wikipedia.org/w/index.php ?title=Jeux_de_Nim&oldid=147799890 (visité le 11/05/2018).

11) Modulo (opération). In : Wikipédia. Page Version ID : 149838166. 25 juin 2018.
https : //fr.wikipedia.org/w/index.php ?title=Modulo_(op%C3%A9ration)&oldid=149838166 (visité le 26/06/2018).

12) Numération.
http ://serge.mehl.free.fr/anx/sys_num.html (visité le 03/07/2018).

13) Somme Numérique — Wikipédia.
https ://fr.wikipedia.org/wiki/Somme_num%C3%A9rique (visité le 18/07/2018).

14) Sprague-Grundy – ou l'art de gagner à tous les coups | BlablaSciencesBlablaSciences.
http : //www.blablasciences.com/ ?p=160 (visité le 29/06/2018).

15) Stratégies magiques au pays de Nim.
https ://interstices.info/strategies-magiquesau- pays-de-nim/ (visité le 18/08/2018).

16) Suites de Beatty.
http ://jm.davalan.org/mots/suites/beatty/index.html (visité le 26/08/2018).

17) Système binaire. In : Wikipédia. Page Version ID : 149995074. 1er juil. 2018.
https ://fr.wikipedia.org/w/index.php ?title=Syst%C3%A8me_binaire&oldid=149995074 (visité le 03/07/2018).

18) Système de numération. In : Wikipédia. Page Version ID : 147623846. 17 avr. 2018.
https ://fr. wikipedia.org/w/index.php ?title=Syst%C3%A8me_de_num%C3%A9ration&oldid=147623846 (visité le 03/07/2018).

19) Théorie des jeux combinatoires. In : Wikipédia. Page Version ID : 148108957. 3 mai 2018.
https ://fr.wikipedia.org/w/index.php ?title=Th%C3%A9orie_des_jeux_combinatoires&oldid= 148108957 (visité le 29/06/2018).

20) Willem Abraham Wythoff. In : Wikipédia. Page Version ID : 150458210. 17 juil. 2018.
https : //fr.wikipedia.org/w/index.php ?title=Willem_Abraham_Wythoff&oldid=150458210 (visité le 26/08/2018).

21) Wythoff.
http ://mathafou.free.fr/jeux/sol302.html (visité le 26/08/2018).

22) Introduction à la théorie des graphes
https ://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/graphes.pdf (consulté le 27.07.2018)

23) Introduction aux graphes
www.iecl.univ-lorraine.fr/ Olivier.Garet/cours/graphes/graphes.pdf (consulté le 27.07.2018)

24) Jeu de Wythoff
sspmp.ch/crm/cours_2017/doc/Ivan_Izmestiev_2.pdf (consulté le 26.08.2018)

25) Le jeu de nim
langevin.univ-tln.fr/recherche/drafts/nim.pdf (consulté le 29.06.2018)

26) Noyau d'un graphe
www.pierreaudibert.fr/tra/Noyau%20d%27un%20graphe.pdf(consulté le 01.08.2018)

27) Jeux de Nim
https ://uclouvain.be/cps/ucl/doc/fsa/documents/Jeux_de_Nim.pdf (consulté le 11.05.2018)

7.3 Images

9) Jeux de Nim.
https ://interstices.info/jeux-de-nim/ (visité le 27/06/2018).

12) Numération.
http ://serge.mehl.free.fr/anx/sys_num.html (visité le 03/07/2018).

22) Introduction à la théorie des graphes
https ://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/graphes.pdf (consulté le 27.07.2018) p.7 et p.33

25) Le jeu de nim
langevin.univ-tln.fr/recherche/drafts/nim.pdf (consulté le 29.06.2018)

27) Jeux de Nim
https ://uclouvain.be/cps/ucl/doc/fsa/documents/Jeux_de_Nim.pdf (consulté le 11.05.2018) p.13

28) Gaz Briquet Bleu Clipart - Recherche Google.
https ://www.google.com/search ?q=gaz+briquet+bleu+clipart&client=firefox-b-ab&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwju9_Gl0rXdAhWjhKYKHVekAF0Q_AUICigB&biw=1215&bih=722#imgrc=l9xez5DrBxhf4M : (consulté le 12.09.2018)

En ce qui concerne les autres illustrations, c'est moi-même qui les ai faites.